

*Trabajo Especial de
Licenciatura en Física:*

**Ecos de Loschmidt en sistemas integrables,
su estudio en modelos de mapas cuánticos**

GUILLERMO A. LUDUEÑA

Director: DR. HORACIO M. PASTAWSKI

Facultad de Matemática Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2007

A mi familia y amigos

Resumen

La mecánica cuántica de sistemas clásicamente caóticos es hipersensible ante una perturbación de su ecuación de evolución. Esto lleva a una pérdida de información que se manifiesta en un decaimiento exponencial en el Eco de Loschmidt (LE)¹. Dado que los sistemas integrables pueden presentar un decaimiento mayor, llevé a afirmar² que estos son aún más sensibles a las perturbaciones. En este trabajo se muestra que la definición tradicional del LE en sistemas integrables computa como pérdida de información errores sistemáticos que son fácilmente corregibles. Proponemos la comparación de las distribuciones de Wigner³ referidas a sus centros, que elimina una parte fundamental de los errores sistemáticos en este caso. Esta corrección es estudiada con modelos numéricos de mapas cuánticos⁴, los cuales presentan grandes ventajas con respecto a los modelos utilizados en trabajos anteriores⁵.

Palabras Clave: Ecos de Loschmidt, reversión temporal, caos cuántico.

Clasificación Biblioteca:

05.45.Mt Quantum chaos; semiclassical methods
05.45.-a Nonlinear dynamics and chaos
05.45.Pq Numerical simulations of chaotic systems

¹R. A. Jalabert and H.M.Pastawski. Environment-independent decoherence rate in classically chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, **86**:2490, 2001.

²G. Veble and T. Prosen. Faster than Lyapunov decays of the classical Loschmidt echo. *Phys. Rev. Lett.*, **92**:034101, 2004.

³E. P. Wigner. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.*, **40**:749, 1932

⁴e.g. Ph. Jacquod, P.G. Silvestrov, and C.W.J. Beenaker. Golden rule decay versus Lyapunov decay of the Loschmidt echo. *Phys. Rev. E*, **64**:055203, 2001.

⁵F. M. Cucchiatti. The Loschmidt echo in classically chaotic systems: Quantum chaos, irreversibility and decoherence. PhD thesis, FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba, June 2004.

Agradecimientos

A mi profesor, Horacio Pastawski, por proponerme trabajar en este interesante tema y guiarme durante este último año.

A la gente en el LaNAIS, quienes tienen muy buen humor y muy buena predisposición para ayudar, y entre ellos especialmente a Patricia Levstein quien me dirigirá los próximos años.

A las bibliotecarias y administrativos del despacho de alumnos, que son gente muy agradable.

A Ricardo Zamar, Cecilia Gonzalez, Clemar Schürer... y el resto de los profesores de quienes tanto aprendí en los últimos años y de quienes espero seguir aprendiendo.

Y por último lo que para mí es lo más importante, a mi familia y a mis amigos, quienes hacen mi vida más feliz. No existe frase que exprese todo el agradecimiento que ustedes merecen, así que solamente les puedo dejar un simple...

...Gracias!!!

Índice general

Resumen	v
Agradecimientos	vii
1. Introducción	1
1.1. Caos clásico	2
1.2. Caos cuántico	2
1.3. Motivación: El decaimiento en sistemas integrables	4
1.4. Los modelos a utilizar	5
1.5. Organización del trabajo	6
2. El espacio de fases en Mecánica Cuántica	7
2.1. La función de Wigner continua	8
2.2. La función de Wigner discreta	13
2.2.1. <i>Espacio de fases discreto</i>	13
2.2.2. <i>Discretización de la función de Wigner</i>	14
3. El Eco de Loschmidt	19
3.1. Régimen perturbativo (<i>PT</i>)	20
3.2. Regímenes de decaimiento en el caso caótico	21
3.2.1. <i>Enfoque de Matrices Aleatorias: la Regla de Oro de Fermi</i> (<i>FGR</i>)	21
3.2.2. <i>Descripción Semiclásica</i>	22
3.2.3. <i>Régimen Lyapunov (términos diagonales del LE)</i>	24
3.2.4. <i>Términos no diagonales: Regla de Oro de Fermi</i>	25
3.3. Decaimiento en el caso integrable	26
3.3.1. <i>Ley de potencias: $t^{d/2}$</i>	26
3.3.2. <i>Otros regímenes de decaimiento en el caso integrable</i>	27
3.4. Resumen: regímenes del Eco de Loschmidt	27

4. Modelos de mapas cuánticos “pateados” (“Periodically Driven Systems”)	31
4.1. Teoría de Floquet	32
4.2. “Trompo pateado” (<i>Kicked Top</i>)	33
4.2.1. <i>Versión Clásica</i>	34
4.2.2. <i>Versión Cuántica</i>	34
4.3. <i>Kicked Rotator</i> o mapa cuántico estándar	45
5. Corrección del Eco de Loschmidt para sistemas integrables	53
5.1. Descripción del problema	55
5.2. Implementación	57
5.3. Resultados numéricos	59
5.3.1. <i>Kicked Top</i>	59
5.3.2. <i>Kicked Rotator</i>	64
6. Conclusiones y comentarios finales	73
A. Propiedades de la Función de Wigner	77
A.1. Cálculo del valor medio En la función de Wigner Continua	77
A.2. Las propiedades que definen la Función de Wigner	78
B. Discretización correcta de los Operadores Punto del espacio de fases	81
B.1. Operadores Punto del espacio de fases	81
B.1.1. <i>Discretización de los operadores punto</i>	82
C. Regímenes de decaimiento del Eco de Loschmidt en el caso caótico	85
C.1. Regla de Oro de Fermi (<i>FGR</i>)	85
C.2. Régimen Lyapunov	86
C.2.1. <i>Evolución temporal de la función de onda</i>	86
C.2.2. <i>Cálculo del Eco de Loschmidt</i>	88
D. Programas principales: FORTRAN	93
D.1. <i>Kicked Top</i>	93
D.2. <i>Kicked Rotator</i>	100
D.3. Librerías	105
E. Programas de ayuda y automatización: C, Perl, Python y Bash	113

Capítulo 1

Introducción

La dinámica clásica podría dividirse en dos grandes grupos de comportamientos muy diferentes; la dinámica integrable o regular y la caótica. Los casos integrables como el oscilador armónico son los mejor comprendidos precisamente por la posibilidad conocer las constantes de movimiento que permiten resolver su dinámica. En contraste, en los casos caóticos, como por ejemplo puede ser un doble péndulo acoplado, si se quiere cierto grado de precisión en la predicción necesitamos una precisión de las condiciones iniciales¹ exponencialmente creciente con el tiempo. Esto los torna prácticamente impredecibles, tal como ocurre con los modelos de predicción meteorológica o de estabilidad planetaria. Justamente estos últimos sistemas son los más abundantes en la naturaleza, por lo que el estudio del caos ha ido cobrando gran relevancia en diversos campos.

En los últimos años se realizaron grandes avances en el estudio del caos dinámico en sistemas cuánticos, con aportes importantes pertenecientes del LaNAIS de RMS en FaMAF, principalmente a través del estudio de la reversibilidad temporal de sistemas caóticos mediante el Eco de Loschmidt. Esta última es una magnitud que permite una cuantificación de la estabilidad tanto de sistemas clásicos como cuánticos.

Sin embargo para sistemas integrables no se ha logrado una caracterización suficientemente completa del Eco de Loschmidt, y existen resultados contradictorios. En este trabajo se intenta echar luz sobre este último punto, introduciendo una definición modificada del Eco de Loschmidt, la cual se estudiará numéricamente mediante modelos de mapas cuánticos.

¹En el caso clásico se necesita más precisión en las condiciones iniciales, mientras que para el caso cuántico se necesita más precisión en el Hamiltoniano



Figura 1.1: Evolución temporal del espacio de fases de un sistema caótico clásico. El cuadro de la izquierda es una distribución inicial uniforme centrada en un punto del espacio de fases (un *patch* inicial). Hacia la derecha el sistema evoluciona bajo un Hamiltoniano caótico por la ecuación de Liouville, por lo que la distribución aumenta exponencialmente su dispersión cuadrática media, pero conservando el área. En el cuadro de más a la izquierda la distribución ocupa casi todo el espacio de fases.

1.1. Caos clásico

Para identificar el tipo de comportamiento que gobernará la dinámica para un dado sistema debemos mirar en un grupo de condiciones iniciales que originalmente determinan una “mancha” en el espacio de fases (figura 1.1). Si la distancia entre *cualquier* par de trayectorias inicialmente en ese conjunto aumenta exponencialmente con el tiempo nos encontramos en el caso caótico. El exponente λ característico de este distanciamiento es independiente de la distancia inicial entre las dos trayectorias y se denomina exponente de Lyapunov. Este crecimiento exponencial de la distancia en el espacio de fases tiene un límite demarcado por el volumen accesible del espacio de fases.

Para la dinámica integrable la distancia entre cualquier par de puntos en la distribución inicial puede decrecer o crecer, pero a lo sumo polinomialmente con el tiempo. Equivalentemente se puede decir que para el caso integrable $\lambda \rightarrow 0$. Además el desarrollo o no de caos para un determinado Hamiltoniano es dependiente de la región en la que se encuentre la distribución inicial. Si un sistema presenta caos que no se desarrolla en todo el espacio de fases, es decir que la dinámica es regular para condiciones iniciales en algunas regiones del espacio de fases, entonces se habla de un sistema que presenta caos “débil” y estas son regiones se llaman “islas de estabilidad”.

1.2. Caos cuántico

Cuando tratamos con un sistema cuántico la noción de “trayectoria” en el espacio de fases pierde significado, por lo que no puede utilizarse la definición

clásica para obtener un exponente de Lyapunov. Esto requirió de una nueva definición para caos en el caso cuántico.

En mecánica cuántica un equivalente para la distancia entre dos estados del sistema (que clásicamente son dos puntos en el espacio de fases) está caracterizada por el producto interno $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$, mientras menor sea este producto, más “distanciados” estarán los estados. Si queremos ver la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema cuántico, nos encontramos con que la unitariedad de la evolución cuántica hace que este producto interno nunca cambie;

$$|\langle\psi_{1(t)}|\psi_{2(t)}\rangle| = |\langle\psi_{1(0)}|U(t)^\dagger U(t)|\psi_{2(0)}\rangle| = |\langle\psi_{1(0)}|\psi_{2(0)}\rangle|$$

donde $U_\Sigma(t) = e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar}$ es el operador evolución temporal a tiempo t con un Hamiltoniano \mathcal{H}_0 . Esto llevó a creer que el caos no podría desarrollarse en sistemas cuánticos.

En 1984, Peres [Per84] propuso que la inestabilidad en los sistemas cuánticos se presentaría en la propiedades asintóticas de su dinámica, es decir, en pequeñas perturbaciones a un Hamiltoniano aleatorio de dimensión N produciría:

$$|\langle\psi_{1(\infty)}|\psi_{2(\infty)}\rangle|^2 = 1/N,$$

mientras que un sistema integrable presentaría grandes fluctuaciones alrededor de la unidad. La propuesta inspirada en los experimentos en sistemas de espines llevados a cabo en el LaNAIS era que la magnitud adecuada para cuantificar el caos en mecánica cuántica estaría dada por

$$\begin{aligned} M(t) &= |\langle\psi_\Sigma(t)|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi(0)|U_\Sigma(t)^\dagger U(t)|\psi(t)\rangle|^2 \end{aligned}$$

donde $U_\Sigma(t) = e^{-i(\mathcal{H}_0+\Sigma)t/\hbar}$ es el operador evolución temporal a tiempo t con un Hamiltoniano ligeramente perturbado $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Sigma$. Esta magnitud se denomina “Eco de Loschmidt” algunos autores prefieren llamarlo fidelidad, dado que describiría la precisión de una reversión temporal imperfecta, relacionada con la histórica polémica entre Boltzmann y Loschmidt². En el 2001, Jalabert y Pastawski [JP01] demostraron que un Hamiltoniano clásicamente caótico bajo ciertas condiciones (estados semiclásicos y perturbaciones pequeñas pero mayores que un umbral $\Sigma > \Sigma_c$) el Eco de Loschmidt presenta un decaimiento exponencial

²El físico austríaco Josef Loschmidt argumentaba, con la intención refutar el teorema H de Boltzmann, que las ecuaciones de movimiento permiten revertir la dinámica de un sistema por más complejo que éste sea. Al invertir el momento de cada partícula en el sistema se llegaría nuevamente al estado inicial, por lo que la entropía se podría reducir a gusto y no sería correcto atribuir una pérdida de memoria al sistema. Esta acción de reversión de la dinámica de cada elemento del sistema, como en el caso de la separación de componentes de un gas discutida por Maxwell, sería atributo de un hipotético mecanismo o “diablillo”.

con un exponente que es precisamente el exponente de Lyapunov clásico. Este resultado generó un gran interés que llevó a la publicación de muchos otros trabajos teóricos, experimentales y numéricos en distintos grupos.

1.3. Motivación: El decaimiento en sistemas integrables

En la línea de trabajos relacionada con el Eco de Loschmidt aparecidos en los últimos años se encuentran discrepancias en el comportamiento del Eco de Loschmidt para sistemas integrables. Es un régimen cuya falta de características universales no es posible una caracterización tan “ simple” como en el caso caótico [VP04, JAB03].

El interés de este trabajo viene precisamente a buscar soluciones al problema en el caso integrable, donde pueden encontrarse resultados contradictorios no solo entre sí, sino también con el significado de un sistema integrable. El problema que despertó nuestro interés es que hay investigadores que afirman que *los sistemas integrables son más sensibles que los caóticos ante una perturbación*. Esto haría que un sistema caótico pueda incluso mejorar el tratamiento de la información cuántica [PZ01, VP04]. Estas afirmaciones se encuentran en una clara discordancia con la imagen intuitiva de estabilidad.

La hipótesis principal de éste trabajo es que en los sistemas integrables el error no está siendo cuantificado con la variable apropiada. En consecuencia, errores sistemáticos fácilmente corregibles están siendo computados como una pérdida de información. Parte de estos errores sistemáticos se deberían a traslaciones en alguna dirección debidas a la perturbación. Consideremos que la perturbación es una fuerza constante. En una evolución integrable, la evolución acumularía un desplazamiento definido en el espacio de fases. En contraste, en un Hamiltoniano caótico la perturbación genera una gran distorsión que contiene todas las direcciones posibles, (figura 1.2). Esto resultaría en un mayor decaimiento del Eco de Loschmidt para el caso integrable que para el caótico, tornando la definición del eco de Loschmidt contradictoria como cuantificación de la sensibilidad de un sistema ante perturbaciones.

La estrategia propuesta es comparar las distribuciones respecto de sus centros de masa y de momentos. Esto podría entonces eliminar una parte fundamental de los errores sistemáticos, dejando al descubierto el cambio en la forma de la distribución, lo cual sería un mejor cuantificador de la sensibilidad ante perturbaciones. Este argumento y los resultados obtenidos al aplicar la corrección en sistemas cuánticos son analizados en el capítulo 5.

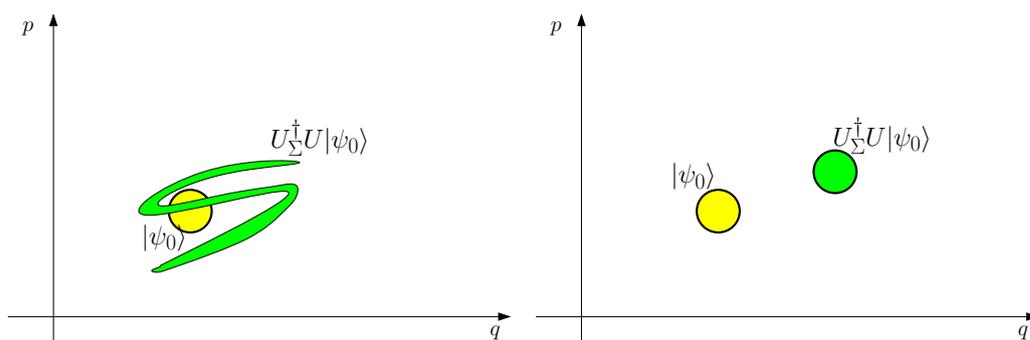


Figura 1.2: A la izquierda se encuentra esquematizado el caso de una evolución caótica, en la cual un estado inicial evoluciona hasta tiempo t , y luego evoluciona durante un tiempo t igual con un Hamiltoniano opuesto y ligeramente perturbado $-(\mathcal{H} + \Sigma)$. El estado resultante de la evolución/reversión crece exponencialmente en su ancho medio hacia todas las direcciones (el producto escalar con su estado inicial decaerá exponencialmente con el tiempo). A la derecha se esquematiza una situación similar, con la diferencia de que la evolución es regular. Al revertir la dinámica con una perturbación que solo causa traslaciones el producto escalar con su estado inicial decaerá, en principio, tan rápido como se desee. Sin embargo una comparación desde los centros de las distribuciones no tendría decaimiento en este último caso, mientras que en el caso caótico seguiría existiendo.

1.4. Los modelos a utilizar

La dinámica cuántica se caracteriza por tener muy pocos casos exactamente solubles, lo cual lleva a la necesidad de utilizar el cálculo numérico como una de las principales herramientas para estudiar estos sistemas.

Esta complejidad de la mecánica cuántica se traslada también a la necesidad de un gran poder de cálculo para obtener la dinámica de sistemas medianamente grandes o a tiempos largos. Precisamente estos sistemas complejos son los que presentan caos.

Los sistemas físicos unidimensionales no desarrollan una dinámica caótica, por lo que la alternativa utilizada en este grupo hasta el momento para estudiar caos es la de estudiar sistemas de dos dimensiones [Cuc04]. Sin embargo existe una alternativa unidimensional para analizar el caos; los modelos de mapas. En estos, la existencia de una acción de una fuerza periódica sobre el sistema permite la exploración de distintos estados energéticos, provoca que el tiempo, considerado como una variable discreta, agregue una “dimensión dinámica” al problema. La transformación del panadero y el mapa logístico de Feigenbaum son los ejemplos clásicos más ilustrativos de este procedimiento iterativo. El equivalente cuántico

son los modelos de “ Mapas Cuánticos” [SV94]³, los cuales son modelos unidimensionales en el sentido de que hay una sola variable en juego (por ejemplo, la proyección de un espín en el eje z) pero cuya dinámica tiene discontinuidades. Estas llevan a que los estados del sistema de un instante al otro de la discontinuidad se mezclen de manera tal que llegan a desarrollar un comportamiento caótico.

Es interesante notar que algunos mapas son implementables mediante la técnica de resonancia magnética nuclear (*NMR*) [HEMC06]. Por estas características estos modelos pueden resultar de gran utilidad, por lo que uno de los objetivos de este trabajo también es comprender estos modelos y obtener una implementación numérica eficiente.

1.5. Organización del trabajo

Los dos siguientes capítulos resumen el marco teórico en el que se ubica este trabajo. El capítulo 2 se dedica a la función de Wigner, la cual es la herramienta necesaria para estudiar el espacio de fases en mecánica cuántica. Hacia el final de este capítulo se encuentra una deducción y descripción de la implementación numérica para sistemas discretos de dimensión finita que se logró en este trabajo. Los detalles sobre la discretización correcta de la función de Wigner se presentan en el apéndice B.1.

En el capítulo 3 se resume el comportamiento del Eco de Loschmidt para sistemas caóticos e integrables. Solo se muestran los resultados principales disponibles en la bibliografía y la discusión más completa se presenta en el apéndice A.2. Los resultados previos esenciales para comprender el resto del trabajo son resumidos al final del capítulo.

El capítulo 4 introduce brevemente la teoría de los modelos de mapas cuánticos y luego se describen los modelos implementados; el Trompo pateado (*Kicked Top*) y el rotador pateado (*Kicked Rotator*). Asimismo se calculan algunas características de estos, como la dinámica analizada desde el espacio de fases, el comportamiento del Eco de Loschmidt y los correspondientes exponentes de decaimiento para distintos valores de los parámetros.

En el capítulo 5 se utilizan los elementos de los anteriores capítulos para analizar el comportamiento de la corrección al Eco de Loschmidt propuesta.

Finalmente en el capítulo 6 se resumen las conclusiones y en los apéndices se encuentran profundizadas las demostraciones del decaimiento del Eco de Loschmidt y los programas utilizados.

³En este artículo se logra la primera versión cuántica de un mapa clásico, la transformación del panadero cuántica (“Quantum Baker’s map”).

Capítulo 2

El espacio de fases en Mecánica Cuántica

En mecánica clásica se puede representar toda la información sobre el estado de un sistema como un punto en el espacio de fases (\vec{q}, \vec{p}) . Sin embargo, en un sistema real, el conocimiento del estado exacto en que se encuentra se dificulta. Por tanto, es conveniente utilizar los puntos del espacio de fases como una variable estocástica. Haciendo un promedio sobre ensambles y asignando una distribución de probabilidades se puede llegar a caracterizar al sistema satisfactoriamente. Esta probabilidad evoluciona en el espacio de fases debido a la evolución de cada uno de sus puntos y se denomina densidad en el espacio de fases clásico $\rho(q, p)$. De este modo hemos sacrificado algo de determinismo en nuestra descripción clásica.

En mecánica cuántica las variables del espacio de fases ya no conmutan, por lo que la descripción del sistema como un punto en el espacio de fases se torna imposible. La precisión con la que se conoce un estado debe respetar el principio de incertidumbre $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$. En contraste con lo que sucede con la descripción probabilística clásica, la existencia de estados de superposición impide definir una probabilidad para cada punto en el espacio de fases.

En vista de estas restricciones, en la mecánica cuántica se acostumbra utilizar la representación en una base en lugar de espacio de fases completo (e.g. función de onda u operador densidad). Este acercamiento resulta muy útil pero deja ocultas muchas características de la mecánica cuántica del sistema que se está estudiando.

A pesar de las semejanzas de la mecánica cuántica con la densidad en el espacio de fases de la mecánica clásica, como ya se mencionó, no se puede definir una probabilidad asociada a un punto en el espacio de fases. Más allá de ello, se puede asociar una función formalmente similar, que se reduce a ésta en el límite clásico. Esta es la función de Wigner [Wig32], la cual no es estrictamente

una probabilidad como en el caso clásico, ya que puede tomar valores negativos. Más allá de esto, los valores medios, correlaciones y demás propiedades que se buscan clásicamente se calculan de una manera análoga. En el límite clásico se reduce a una probabilidad definida positiva (clásica), de modo que es además un herramienta muy útil para encontrar correspondencias clásicas o encontrar las regiones donde se hace más evidente el comportamiento cuántico.

A continuación se presenta una deducción de esta función y sus propiedades para los casos de espacio continuo y de espacio discreto y finito, así como la implementación numérica desarrollada para este trabajo.

2.1. La función de Wigner continua

En mecánica cuántica el operador momento \hat{p} y el operador posición \hat{q} no conmutan, ya que;

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \quad (2.1)$$

Esto significa que no se puede determinar simultáneamente la posición y momento de una partícula en el espacio de fases, haciendo imposible el análisis que se realiza en mecánica clásica. Para sobrellevar esta dificultad Wigner [Wig32, HOSW84] demostró que se puede encontrar una teoría formalmente análoga al espacio de fases clásico para mecánica cuántica.

Con el propósito de deducir esta función, consideremos un sistema en un estado inicial $|\psi\rangle$ y un operador hermitico característico dependiente de los operadores momento y posición (una traslación en el espacio de fases);

$$\hat{T}(\hat{p}, \hat{q}, \delta q, \delta p) = e^{\frac{i}{\hbar}(\delta q \hat{p} + \delta p \hat{q})} \quad (2.2)$$

cuyo valor de expectación es (utilizando $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$)

$$\bar{T}(\delta q, \delta p) = \langle \psi | \hat{T}(\hat{p}, \hat{q}, \delta q, \delta p) | \psi \rangle = \langle \psi | e^{\frac{i}{\hbar}(\delta q \hat{p} + \delta p \hat{q})} | \psi \rangle \quad (2.3)$$

$$= \langle \psi | e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\delta q}{2} \hat{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \delta p \hat{q}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\delta q}{2} \hat{p}} | \psi \rangle \quad (2.4)$$

En la representación posición tenemos $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, trabajando en esta base tenemos la relación de completitud $\int |q\rangle \langle q| dq = 1$, por lo que al introducir esta identidad entre estas exponenciales y sacando la integral afuera, el valor de expectación característico queda

$$\begin{aligned} \bar{T}(\delta q, \delta p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle \psi | e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\delta q}{2} \hat{p}} | q \rangle \langle q | e^{\frac{i}{\hbar} \delta p \hat{q}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\delta q}{2} \hat{p}} | \psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle \psi | q - \delta q/2 \rangle e^{\frac{i}{\hbar} \delta p q} \langle q + \delta q/2 | \psi \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde se utilizó el hecho de que $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}\lambda}$ es el generador de traslaciones en λ y que $e^{\hat{q}}|q\rangle = |q\rangle e^q$.

Luego se puede definir a la función de Wigner $W(q, p)$ como la (doble¹) transformada de Fourier de $\bar{T}(\delta q, \delta p)$;

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta q \int_{-\infty}^{\infty} d\delta p \bar{T}(\delta q, \delta p) e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q p + \delta p q)} \quad (2.6)$$

Al expandir la definición $\bar{T}(\delta q, \delta p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi(q - \delta q/2)^\dagger \psi(q + \delta q/2) e^{\frac{i}{\hbar} q \delta p}$ se obtiene

Definición 2.1 (Función de Wigner)

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q - \delta q/2)^\dagger \psi(q + \delta q/2) e^{-\frac{i}{\hbar} \delta q p} d\delta q$$

La función de Wigner $W(q, p)$ es formalmente análoga a la distribución de probabilidades clásica en el espacio de fases, y se reduce a ésta en el límite clásico. Sin embargo, en el régimen cuántico no se comporta como una distribución de probabilidades en el sentido clásico, ya que, en ciertas regiones, toma valores negativos. Estas regiones manifiestan el comportamiento no-clásico del sistema. Algunos ejemplos se muestran en las figuras 2.1, 2.2 y 2.3.

Como se demuestra en el apéndice A.1, el valor medio de algún observable \hat{C} tiene la misma manera de calcularse que en mecánica clásica haciendo la analogía $W(q, p) \Leftrightarrow \rho(q, p)$.

$$\langle C \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp C(q, p) \rho(q, p) \quad (2.7)$$

La función de Wigner queda unívocamente determinada por las siguientes tres propiedades [BB87]

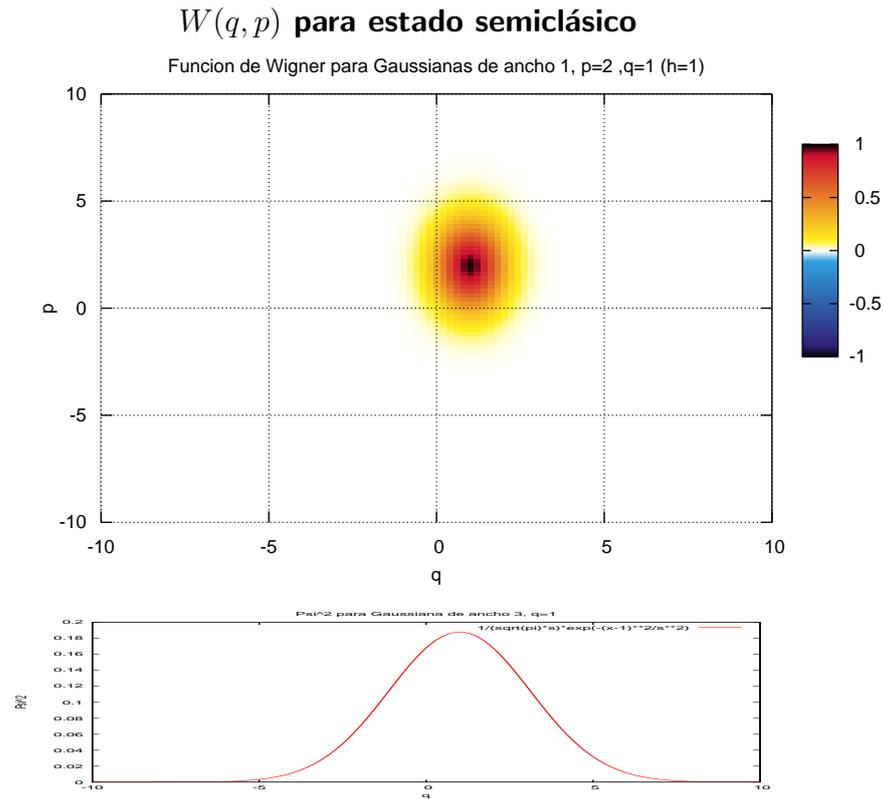
$$\text{Im}[W(q, p)] \equiv 0 \quad (2.8)$$

$$\rho(q) = |\psi(q)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp \text{ y las otras distrib. marginales} \quad (2.9)$$

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{1(q,p)} W_{2(q,p)} dq dp \quad (2.10)$$

En el apéndice A se encuentran algunas demostraciones para estas propiedades.

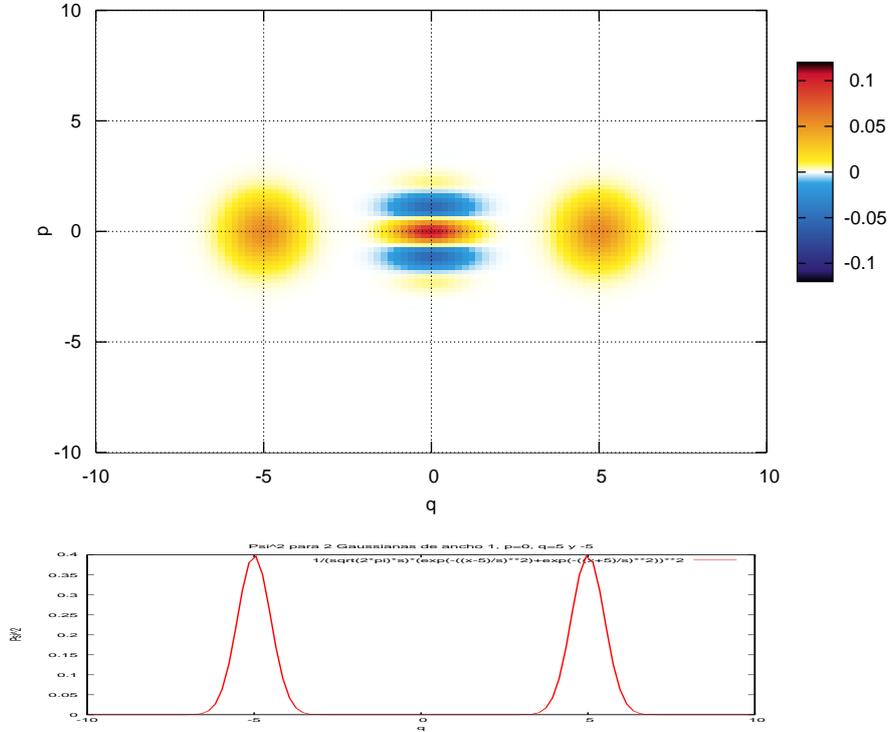
¹Se está analizando el caso unidimensional, para N dimensiones corresponden $2N$ transformadas, una por cada variable.



$$\psi(q) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{i}{\hbar}p_0(q-q_0)} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2\sigma^2}} \quad W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{(p-p_0)^2\sigma^2}{4\hbar}}$$

Figura 2.1: Para un estado coherente (*semiclásico* o de *incerteza mínima*) la función de Wigner (arriba) es positiva en todos los puntos, y lo que puede interpretarse como una probabilidad clásica. La probabilidad $|\psi(q)|^2$ (Abajo) es la suma sobre la coordenada p de la función de Wigner.

$W(q, p)$ para la superposición de dos estados semiclásicos centrados en $q = \pm 5$



$$\psi(q) = \frac{1}{(4\pi\sigma_1^2)^{1/4}} e^{-\frac{i}{\hbar} p_0 (q - q_0)} e^{-\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{(4\pi\sigma_2^2)^{1/4}} e^{-\frac{i}{\hbar} p_0 (q + q_0)} e^{-\frac{(q + q_0)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$W(q, p) = \frac{1}{\sqrt{(8)\pi\hbar}} e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2\hbar}} \left(e^{-\frac{(q - q_0)^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{(q + q_0)^2}{\sigma^2}} + 2 \cos\left(\frac{pq_0}{2\hbar}\right) e^{-\frac{q^2}{\sigma^2}} \right)$$

Figura 2.2: Función de Wigner para una superposición de dos estados coherentes. La probabilidad en la base q ($|\psi(q)|^2$, abajo) muestra probabilidades semiclásicas separadas. Sin embargo la función de Wigner correspondiente (arriba) presenta términos de interferencia debidos a que este es un estado de superposición entre los estados semiclásicos. Las oscilaciones en la función de Wigner en el área clásicamente prohibida tienen un período inversamente proporcional a la distancia entre los paquetes (el ancho medio de todo el estado ψ) y una amplitud mayor a la de las regiones semiclásicas, lo cual es más evidente en la figura 2.3.

$W(q, p)$ para superposición de dos estados semiclásicos
centrados en $q = \pm 5$

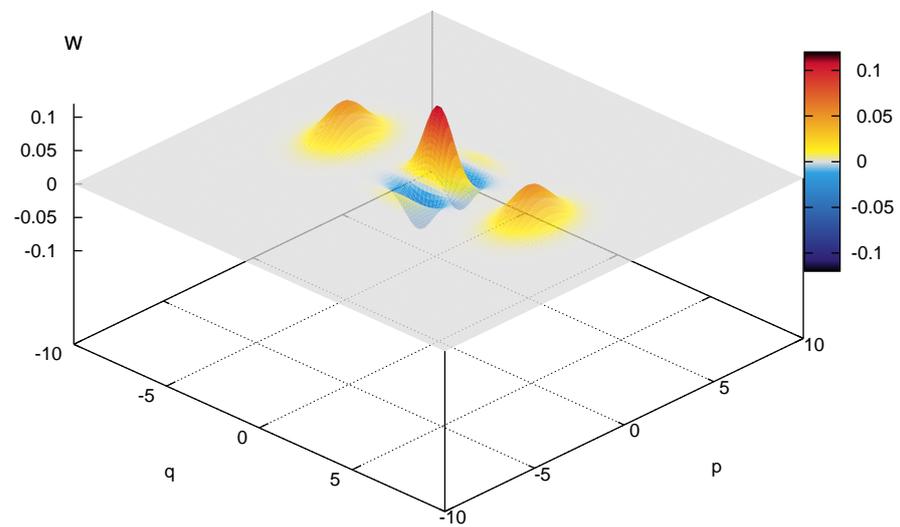


Figura 2.3: Función de Wigner para una superposición de dos estados coherentes. En este caso el gráfico está en perspectiva, ya que en éste se puede observar mejor que el punto más alto $q = 0, p = 0$ que es región clásicamente prohibida.

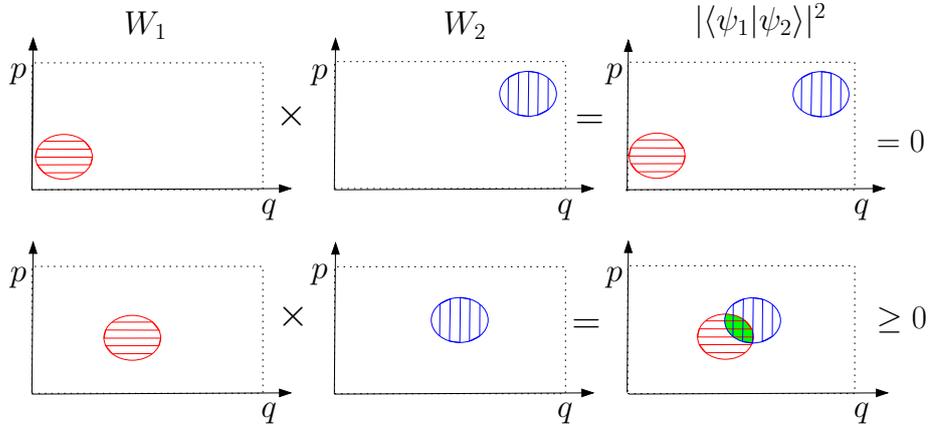


Figura 2.4: Esquema gráfico del producto escalar de dos estados a través de sus funciones de Wigner. En la línea de arriba se hace el producto de dos estados coherentes muy distanciados en el espacio de fases, por lo que su producto es igual a cero. En la siguiente línea existe una superposición de las distribuciones, por lo que el producto es mayor o igual a cero. El producto en este caso puede llegar a ser nulo si hay áreas negativas multiplicadas por áreas positivas sobre todo el espacio las contribuciones se anulen.

Se puede deducir de estas propiedades la normalización de la función de Wigner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp dq = 1 \quad (2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p)^2 dp dq = 1 \quad (2.12)$$

2.2. La función de Wigner discreta

2.2.1. Espacio de fases discreto

Se considerará un sistema cuántico con un espacio de Hilbert N -dimensional y una base "posición" $|q\rangle, q = 0, \dots, N-1$, con condiciones de contorno periódicas ($|q+N\rangle = |q\rangle$). Asimismo definimos su base conjugada "momento" $|p\rangle, p = 0, \dots, N-1$, relacionada por una transformada de Fourier discreta

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} e^{i2\pi qp/N} |q\rangle \quad (2.13)$$

Al acomodar N estados en un área en el espacio de fases (normalizo a 1), y como cada estado ocupa un espacio $2\pi\hbar$, entonces se obtiene la relación $N = 1/2\pi\hbar$. Notemos que $N \rightarrow \infty \Leftrightarrow \hbar \rightarrow 0$ (límite semiclásico). Por tanto podemos pensar que N es una constante de Planck efectiva.

2.2.2. Discretización de la función de Wigner

La definición de la función de Wigner generalizada al espacio discreto requiere ser cuidadoso con varios detalles. La solución correcta se encuentra en [MPS02], un resumen de dicha discretización, se encuentra en el apéndice B.1.

Para llegar a la discretización correcta se introduce un espacio $2N \times 2N$. A partir de éste se puede definir la función de Wigner según la ecuación B.2 en el espacio de dimensión $2N \times 2N$. A partir de la definición, y debido a las propiedades B.17 se cumple que solo los primeros $N \times N$ elementos son independientes y el resto se calcula según

$$W(q + \Delta_q N, p + \Delta_p N) = W(q, p)(-1)^{\Delta_q p + \Delta_p q + \Delta_q \Delta_p N} \quad (2.14)$$

donde $\Delta_q, \Delta_p = \{0, 1\}$ y $q, p = 0 \dots N - 1$. Estos $3N^2$ elementos que se calculan a partir de los primeros $N \times N$ (i.e. los valores de $W(q, p)$ para los cuales $\Delta_p \neq 0$ o $\Delta_q \neq 0$) son llamados "fantasmas" y pueden ser evitados [AD05].

Como en el espacio $2N \times 2N$ los operadores punto son un conjunto completo del subespacio $N \times N$, la matriz densidad se puede escribir como una combinación lineal de éstos, cuyos coeficientes son los valores de la función de Wigner (el $4N$ sale de B.19):

$$\hat{\rho} = N \sum_{2N \times 2N} W(q, p) \hat{A}(q, p) \quad (2.15)$$

$$= 4N \sum_{N \times N} W(q, p) \hat{A}(q, p) \quad (2.16)$$

ya que las contribuciones en cada espacio $N \times N$ son iguales. Con esto se puede calcular el producto escalar de dos estados:

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = Tr [\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2]_{N \times N} = 4N \sum_{N \times N} W_{1(q,p)} W_{2(q,p)} \quad (2.17)$$

de aquí se pueden obtener las normalizaciones del caso discreto;

$$\sum_{N \times N} W(q, p) = \frac{1}{4N} \quad (2.18)$$

$$\sum_{N \times N} W(q, p)^2 = \frac{1}{4N} \quad (2.19)$$

donde es importante notar que no se puede normalizar la función de Wigner discreta para que cumpla con las dos normalizaciones del caso continuo (ecuaciones 2.11 y 2.12).

Usando B.16 en B.2 se puede obtener la discretización de la definición 2.1

$$W(q, p) = \frac{1}{2N} \sum_{\delta q=0}^{N-1} \langle q - \delta q | \hat{\rho} e^{i \frac{2\pi}{N} \delta q (2p-q)} | \delta q \rangle \quad (2.20)$$

que para $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ obtenemos:

Definición 2.2 (Función de Wigner Discreta)

$$W(q, p) = \frac{1}{2N} \sum_{\delta q/2=0}^{N-1} \psi(q - \frac{\delta q}{2})^\dagger \psi(\frac{\delta q}{2}) e^{i \frac{2\pi}{N} \frac{\delta q}{2} (p-q/2)}$$

donde $\psi(n)$ es la n -ésima componente del vector complejo función de onda (por ejemplo un spinor), valuado en $\frac{\delta q}{2} = 0 \dots N-1$ (figura 2.5).

Al aplicar la propiedad de las transformadas de Fourier $\mathcal{F}[f(x - \Delta)](k) = \mathcal{F}[f(x)](k) e^{i \frac{2\pi}{N} \Delta k}$ se puede ver que el factor $e^{i \frac{2\pi}{N} n q/2}$ tiene el mismo efecto que renombrar los vectores con $n = -N/2 + 1 \dots N/2$

$$W(q, p) = \frac{1}{2N} \sum_{\frac{\delta q}{2}=-N/2+1}^{N/2} \psi(q - \frac{\delta q}{2})^\dagger \psi(q + \frac{\delta q}{2}) e^{i \frac{2\pi}{N} \frac{\delta q}{2} p} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2N} \mathcal{F}[\psi(q - \frac{\delta q}{2}/2)^\dagger \psi(q + \frac{\delta q}{2})](q, p) \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2N} \mathcal{F}[P(q, \delta q)](q, p) \quad (2.23)$$

donde $P(q, \delta q) = \psi(q - \frac{\delta q}{2})^\dagger \psi(q + \frac{\delta q}{2})$. De modo que se puede calcular la función de Wigner como una simple transformada de Fourier discreta de un vector $P(q, \delta q)$ calculado a partir de la función de onda.

Se debe notar que $P(q, \delta q)$ es un vector cuya cantidad de elementos depende de n (ya que $-N/2 + 1 \leq q \pm n/2 \leq N/2$). Por ello en este trabajo, con el fin de utilizar el algoritmo de la Fast Fourier Transform (*FFT*), el cual requiere un número de elementos $N = 2^{n_q}$, se agregan elementos de valor nulo (i.e. $P(q, \delta q) = 0$ si $q \pm \delta q \notin [0 \dots N]$) según sea necesario. Esto es equivalente a multiplicar la función $P(q, \delta q)$ por una función escalón, cuya transformada es una función $\text{sinc}(\delta q)$. Por las propiedades de la *FFT* el efecto de esto son pequeñas oscilaciones en la modulación de la transformada de $P(q, \delta q)$ (ver figura 2.7),

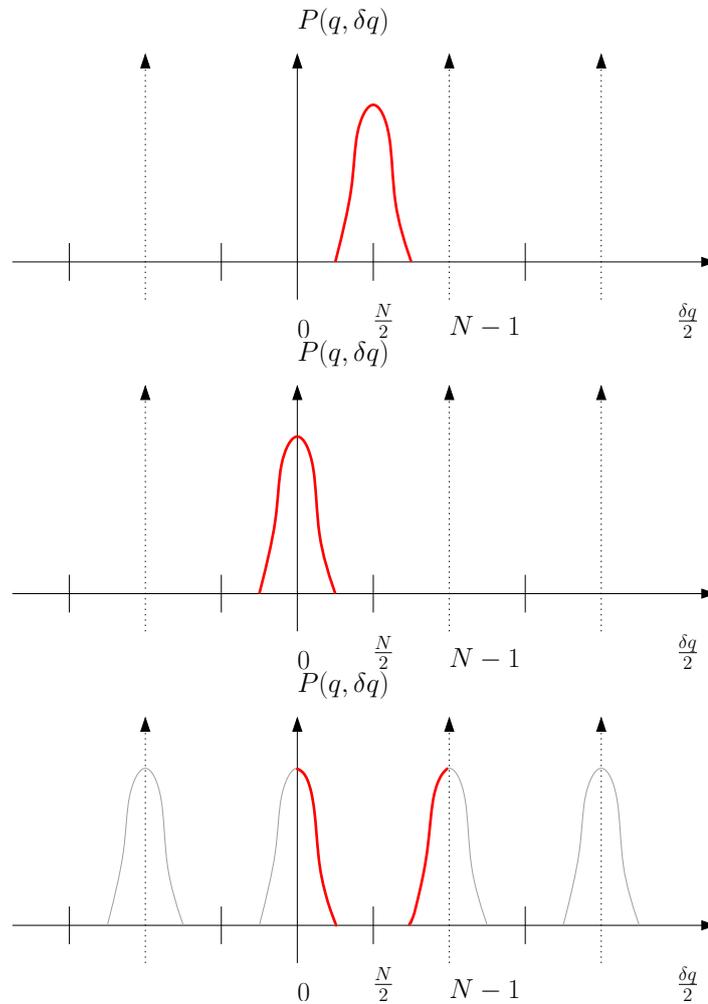


Figura 2.5: Esquema de los pasos para representar el vector a ser transformado, $P(q, \delta q)$. En la definición 2.2 se utiliza un vector centrado en $N/2$, por lo que las fases deben corregirse por un factor exponencial oscilante (arriba). Con la modificación obtenida en la ecuación 2.23 el vector a transformar queda centrado en 0 (al medio). Como la FFT se define para valores $0 \dots N - 1$, se debe utilizar la periodicidad de la transformada discreta y quedarnos con dichos elementos (abajo). Este vector es el que se se le debe entregar a la rutina FFT .

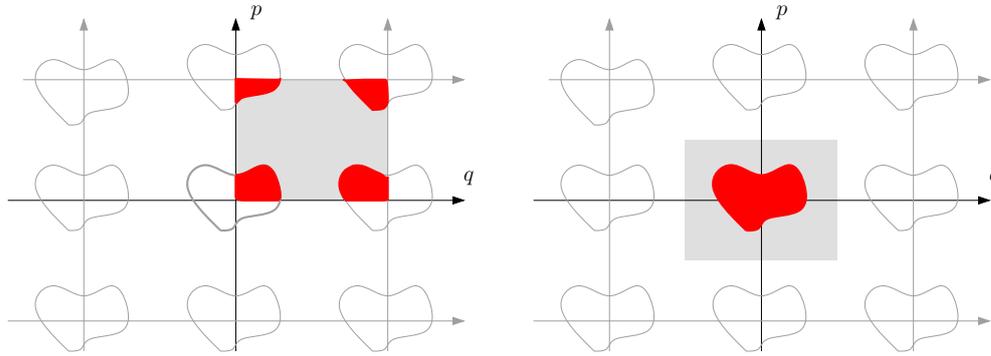


Figura 2.6: La función de Wigner obtenida luego de hacer la *FFT* de los N vectores correspondientes a cada valor de q , como es descrito en la figura 2.5, queda corrido con respecto a la base en la que inicialmente se tenía la función de onda (izquierda). Por ello hay que volver a utilizar la propiedad de periodicidad en N para poder analizar el espacio de fases en el mismo rango de coordenadas en las que estaba expresada la función de onda (derecha).

i.e. la función de Wigner $W(q, p)$. (Notar que en todo esto los valores de δq negativos corresponden a valores mayores a $N/2$, i.e. $-\delta q \rightarrow -\delta q + N$, en el vector a ser transformado debido a la periodicidad de la *FFT*.)

De todos modos estos efectos no son apreciables si el número N es grande. Particularmente para $N \geq 256 = 2^8$ se obtuvieron excelentes resultados. Esto se debe a que los valores para los cuales $P(q, \delta q)$ tiene muy pocos elementos, i.e. δq grande (evidenciándose de mayor manera el efecto de las oscilaciones), la transformada $W(q, p)$ tiene muy poca amplitud (porque la función transformada tenía un área muy pequeña), de modo que casi no tiene peso en la función resultante.

Finalmente la función de Wigner discreta es un arreglo de $N \times N$ valores en la cual las columnas son las *FFT* de las funciones $P(q, \delta q)$ para los distintos valores de q , y las filas corresponden a los elementos p .

Es notable que todo el proceso de discretización en la práctica (a la hora de obtener resultados numéricos) solo tiene el efecto de introducir el factor $1/(2N)$ en la función de Wigner, comparado con una simple discretización de la definición 2.1 (y un factor N en el producto escalar). El resto de los $2N \times 2N$ elementos se obtienen por la relación 2.14, y no son más que imágenes “espejo” con franjas de interferencia (debido al factor proporcional a potencias de -1) que carecen significado físico, por lo que no hay ninguna necesidad de calcularlas.

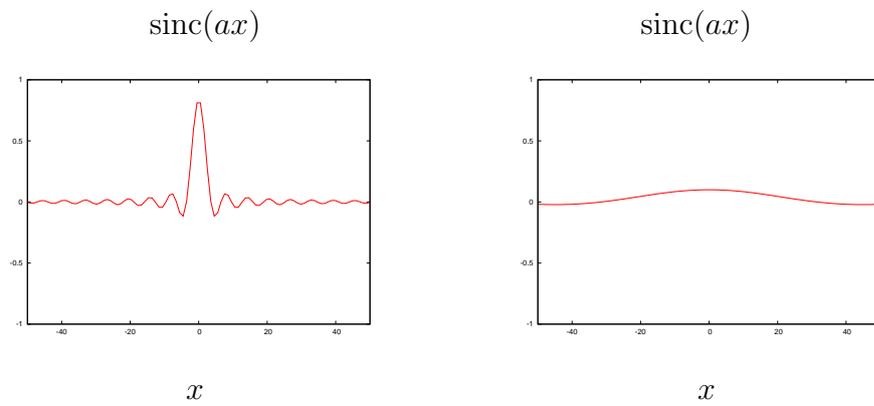


Figura 2.7: El efecto de agregar ceros en el vector $P(q, \delta q)$ es el de multiplicar por una función escalón, cuya transformada es una función $\text{sinc}(ax)$, donde el período a es el ancho del escalón. En la figura de la izquierda se encuentra la función sinc para una gran cantidad de elementos (a grande). En este caso al haber muchos elementos el período estaría muy bien definido y la transformada exacta sería una Gaussiana, mientras que al usar la *FFT* con los ceros agregados hay que multiplicar por esta función, la cual es prácticamente una Gaussiana con pequeñas oscilaciones en las colas. En el caso de muy pocos elementos ($a \ll N$, izquierda) el período es muy grande y no alcanza a hacerse evidente. De este modo que, como puede evidenciarse en los resultados, los errores no son importantes y el comportamiento de la función obtenida es correcto.

Capítulo 3

El Eco de Loschmidt

La magnitud más aceptada actualmente para cuantificar estabilidad en la dinámica de un sistema cuántico está dado por el “Eco de Loschmidt”. Este es básicamente la precisión con que se recupera un estado inicial ψ_0 después que este evolucionó por tiempo t con un Hamiltoniano \mathcal{H}_0 , y luego se aplicó una reversión temporal imperfecta a través de la acción de un Hamiltoniano $-(\mathcal{H}_0 + \Sigma)$ durante otro intervalo t . Esta definición supone la acción de un agente externo que invierte la dinámica a un tiempo dado, y la imperfección inevitable del procedimiento lo cual se refleja en la pequeña modificación al Hamiltoniano, Σ . La idea natural, base de la teoría de caos clásico, es que la complejidad del sistema puede amplificar el efecto de estos errores.

En virtud del formalismo de la mecánica cuántica, esto es equivalente a la proyección o producto interno entre dos estados que evolucionaron hasta un tiempo t con Hamiltonianos ligeramente diferentes a partir de un mismo estado inicial. En este contexto suele hablarse de “fidelidad” de la evolución.

Entonces se tiene

Definición 3.1 (Eco de Loschmidt)

$$M(t) = |\langle \psi(0) | (e^{i(\mathcal{H}_0 + \Sigma)t/\hbar} e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar} | \psi(0) \rangle)|^2 \quad (3.1)$$

$$= |\langle \psi(0) | U_\Sigma(t)^\dagger U(t) | \psi(0) \rangle|^2 \quad (3.2)$$

$$= |\langle \psi_\Sigma(t) | \psi(t) \rangle|^2 \quad (3.3)$$

Todas las definiciones anteriores son equivalentes.

Esta es la herramienta necesaria para diferenciar el tipo de dinámica de un sistema y se espera que la velocidad de decaimiento represente cuantitativamente la sensibilidad de un sistema ante perturbaciones.

A continuación se describen los regímenes que pueden observarse en el Eco de Loschmidt en un sistema cuántico.

3.1. Régimen perturbativo (PT)

Lo primero que se logra deducir sobre el comportamiento del Eco de Loschmidt es su decaimiento a tiempos cortos, a partir de la teoría de perturbaciones (*PT*, por las siglas en Inglés) [Per84]. En este caso, el régimen de decaimiento es independiente de \mathcal{H}_0 , es simplemente una propiedad de todos los sistemas cuánticos ante pequeñas perturbaciones.

Consideremos el Eco de Loschmidt según la ecuación 3.1. Asumiendo Σ muy pequeño, la teoría perturbativa a primer orden daría una corrección a las autoenergías según $E_n = E_n^0 + \langle n|\Sigma|n\rangle$, mientras que aproximadamente se seguiría cumpliendo $\langle n|m\rangle_0 \simeq \delta_{n,m}$ (los nuevos autoestados se los deja sin corrección). Entonces

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|n\rangle \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n^0 + \langle n|\Sigma|n\rangle)t}|n\rangle \quad (3.4)$$

con esto el Eco de Loschmidt se aproxima por

$$M(t) = |\langle \psi_0 | e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0 t} | \psi_0 \rangle|^2 \simeq \left| \sum_n |a_n|^2 e^{\frac{i}{\hbar}\langle n|\Sigma|n\rangle t} \right|^2 \quad (3.5)$$

donde $|\psi_0\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$. Al tomar la expansión de la exponencial para $t\Sigma$ pequeño obtenemos $e^t = 1 + t + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$, con esto

$$\begin{aligned} M(t) &= \left| \sum_n |a_n|^2 \left(1 + \frac{i}{\hbar} \langle n|\Sigma|n\rangle t + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \langle n|\Sigma|n\rangle t \right)^2 + \dots \right) \right|^2 \\ &= 1 + i \frac{t}{\hbar} \sum_n |a_n|^2 \langle n|\Sigma|n\rangle - i \frac{t}{\hbar} \sum_n |a_n|^2 \langle n|\Sigma|n\rangle + \frac{t^2}{\hbar^2} \left| \sum_n |a_n|^2 \langle n|\Sigma|n\rangle \right|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} |a_n|^2 \langle n|\Sigma|n'\rangle \langle n'|\Sigma|n\rangle - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} |a_n|^2 \langle n|\Sigma|n'\rangle \langle n'|\Sigma|n\rangle + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{t}{\hbar} \right)^2 \left(\sum_n |a_n|^2 \langle n|\Sigma^2|n\rangle - \left| \sum_n |a_n|^2 \langle n|\Sigma|n\rangle \right|^2 \right) + \dots \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$= 1 - \Delta\Sigma^2 \left(\frac{t}{\hbar} \right)^2 + \dots \quad (3.7)$$

donde $\Delta\Sigma^2 = \langle \psi_0 | \Sigma^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | \Sigma | \psi_0 \rangle^2$. Es decir que se obtiene un decaimiento cuadrático con el tiempo para tiempos cortos o perturbaciones muy pequeñas y tiempos no tan largos ($t\Sigma$ pequeño), que va proporcional a la desviación cuadrática media de la perturbación.

3.2. Regímenes de decaimiento en el caso caótico

3.2.1. Enfoque de Matrices Aleatorias: la Regla de Oro de Fermi (FGR)

Una manera de modelar las propiedades cuánticas universales de un sistema clásicamente caótico es representar su Hamiltoniano por matrices aleatorias [BGS84]. Entonces es razonable esperar que los elementos de la perturbación $\Sigma_{n,n'} = \langle n|\Sigma|n'\rangle$, en la base de autoestados de \mathcal{H}_0 , tienen una distribución Gaussiana, independiente de como sea Σ . Promediando estas matrices aleatorias se obtiene para el eco

$$\langle M(t) \rangle = |\langle \psi_0 | \langle e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} | \psi_0 \rangle|^2 \quad (3.8)$$

Para promediar el operador evolución $e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} = U(t)$ se utilizan las llamadas *funciones de Green*. Los pasos intermedios pueden encontrarse en el apéndice C.1, donde el paso principal es aproximar los valores $\langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle$ por un promedio $\langle \Sigma \rangle$. Finalmente se obtienen correcciones.

Bajo la hipótesis de que los valores $\langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle$ varían muy poco se los reemplaza por un promedio. Con esto las autoenergías se verían corregidas por

$$\gamma_n(E_n) = \Delta_n(E_n) - i\Gamma_n(E_n) \quad (3.9)$$

donde los valores $\Delta_n(E) \simeq 0$ y

$$\Gamma_n(E) = 2\pi \sum_{n'} \langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle \delta(E - E_{n'}) \quad (3.10)$$

$$\approx 2\pi \langle \Sigma^2 \rangle / \Delta \quad (3.11)$$

Finalmente el promedio de las matrices evolución temporal en la base de autoestados de \mathcal{H}_0 con autoenergías E_n es

$$\bar{U}_{n,n'}(t) = \delta_{n,n'} e^{-i\frac{E_n t}{\hbar} - \frac{\Gamma t}{2\hbar}} \quad (3.12)$$

de modo que el Eco de Loschmidt pasa a ser

$$\begin{aligned} M(t) &= \left| \langle \psi_0 | U_{\Sigma}(t)^\dagger U(t) | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle \psi_0 | e^{-\Gamma t / (2\hbar)} | \psi_0 \rangle \right|^2 = e^{-\Gamma t / \hbar} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con lo que tenemos un decaimiento exponencial con el exponente Γ/\hbar .

Para terminar este exponente caracteriza la densidad local de estados (*LDoS*) definida

$$N_{\psi(E)} = \sum_{\phi} |\langle \psi | \phi \rangle|^2 \delta(E - E_{\phi}) \quad (3.14)$$

En el caso de la *FGR* nunca se impone un estado inicial. Entonces es válida también para un autoestado $|n\rangle$ de \mathcal{H}_0 . En este caso el Eco de Loschmidt es

$$M(t) = \left| \langle n | U_{\Sigma}(t)^{\dagger} U(t) | n \rangle \right|^2 \quad (3.15)$$

$$= \left| \langle n | U_{\Sigma}(t)^{\dagger} | n \rangle \right|^2 \left| e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \right|^2 \quad (3.16)$$

$$= \left| \sum_{\phi} |\langle n | \phi \rangle|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\phi} t} \right|^2 \quad (3.17)$$

$$= \left| \int N_{n(E)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\phi} t} dE \right|^2 \quad (3.18)$$

donde ϕ son los autoestados del Hamiltoniano perturbado \mathcal{H} .

Para el caso de matrices aleatorias *LDoS* tiene una distribución Lorenziana [WC02]

$$N(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + E^2} \quad (3.19)$$

lo cual es útil para calcular Γ y comparar con el exponente del decaimiento [JSB01].

3.2.2. Descripción Semiclásica

En esta sección muestro los pasos principales de la deducción del régimen Lyapunov cuántico, los detalles se encuentran en el apéndice C.2.

El modo de abordar el problema es el siguiente: Partiendo de un estado inicial Gaussiano, centrado en la posición \mathbf{r}_0 y con momento \mathbf{p}_0 .

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}, t = 0) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^{d/4} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \right] \quad (3.20)$$

cuya dinámica está gobernada por un Hamiltoniano genérico \mathcal{H}_0 y uno ligeramente perturbado $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Sigma$.

El comportamiento para otros estados iniciales como autoestados en p o q , o estados aleatorios presentan un comportamiento diferente [WC02].

El problema se aborda con un enfoque semiclásico [JP01]. Se representa la evolución temporal de la función de onda como una integral sobre caminos

clásicos y se desprecian el resto de las trayectorias;

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} | \psi_0 \rangle \quad (3.21)$$

$$= \int d\bar{\mathbf{r}} \langle \mathbf{r} | e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} | \bar{\mathbf{r}} \rangle \langle \bar{\mathbf{r}} | \psi_0 \rangle \quad (3.22)$$

$$= \int d\bar{\mathbf{r}} K(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) \psi(\bar{\mathbf{r}}, 0) \quad (3.23)$$

$K(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$ es el propagador de $\bar{\mathbf{r}}$ a \mathbf{r} en un tiempo t , y solo se consideran las trayectorias clásicas $s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$

$$K(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) \approx \sum_{s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)} K_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{d/2} \sum_{s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)} C_s^{1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) \right] \quad (3.24)$$

donde $\mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$ es la acción clásica sobre la trayectoria y C_s es el Jacobiano. A continuación la acción se aproxima a primer orden ($\mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \simeq \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) + \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)|_{\bar{\mathbf{r}}=\mathbf{r}_0} \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)$), de lo cual se llega a

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}) = (4\pi\sigma^2)^{d/4} \sum_{s'} (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) K_{s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 \right] \quad (3.25)$$

Esta última ecuación le da importancia solo a los términos de trayectorias para los cuales se difiere poco (menos que \hbar/σ) del momento $\bar{\mathbf{p}}_0$.

Al aplicar en la definición del Eco de Loschmidt se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi_\Sigma(t) | \psi(t) \rangle &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^{d/2} \int d\mathbf{r} \sum_{s, \bar{s}} \sqrt{C_{\bar{s}}} \sqrt{C_s} \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathcal{S}_s - \mathcal{S}_{\bar{s}}) - \frac{i}{\hbar} \pi (\mu_s - \mu_{\bar{s}}) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2} ((\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 + (\bar{\mathbf{p}}_{\bar{s}} - \mathbf{p}_0)^2) \right] \quad (3.26) \end{aligned}$$

Si se supone que las trayectorias no cambian apreciablemente debido a una perturbación Σ muy pequeña, al menos en el intervalo de tiempo de interés, tendríamos solo las sumas sobre $\bar{s} \approx s$ (*aproximación de perturbación clásicamente débil*).

$$\begin{aligned} \langle \psi_\Sigma(t) | \psi(t) \rangle &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^{d/2} \int d\mathbf{r} \sum_s C_s \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta \mathcal{S}_s \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 \right] \quad (3.27) \end{aligned}$$

y elevando esto al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned}
 M(t) = & \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int d\mathbf{r} \sum_s C_s \int d\mathbf{r}' \sum_{s'} C_{s'} \times \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta \mathcal{S}_s - \frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 \right] \times \\
 & \times \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \Delta \mathcal{S}_{s'} - \frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_{s'} - \mathbf{p}_0)^2 \right] \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Aquí se separan las contribuciones de los términos $s \approx s'$ (diagonales) y $s \neq s'$ (no diagonales) se puede escribir

$$M(t) = M^{nd}(t) + M^d(t) \quad (3.29)$$

Los términos diagonales son una pequeña fracción de los no-diagonales, por lo que estos últimos dominan la dinámica para tiempos cortos es decir $M^{nd}(t \gtrsim 0) \lesssim 1$. La idea es que estos términos son muy susceptibles a interferencias destructivas por lo que decaen muy rápidamente con una forma de FGR. Cuando estos términos decaen, la dinámica resulta gobernada por los términos diagonales que decaen regidos por el exponente de Lyapunov.

3.2.3. Régimen Lyapunov (términos diagonales del LE)

Si se sigue en la descripción anterior con s y s' muy cercanas (términos diagonales), se aproxima la perturbación a primer orden, obteniendo

$$\Delta \mathcal{S}_s - \Delta \mathcal{S}_{s'} \approx \int_0^t \nabla \Sigma(\mathbf{q}_s(t')) \cdot (\mathbf{q}_s(t') - \mathbf{q}_{s'}(t')) dt' \quad (3.30)$$

Donde la diferencia $\mathbf{q}_s(t') - \mathbf{q}_{s'}(t')$ es muy pequeña y puede aproximarse como

$$\mathbf{q}_s(t') - \mathbf{q}_{s'}(t') = B^{-1}(t')(\bar{\mathbf{p}}_s - \bar{\mathbf{p}}_{s'}) = B^{-1}(t')B(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.31)$$

con la matriz $B_{ij} = -\frac{\partial^2 \mathcal{S}_s}{\partial \mathbf{r}_i \partial \bar{\mathbf{r}}_j}$. En el caso de comportamiento caótico $B^{-1}(t')$ está dominada por su mayor autovalor $e^{\lambda t'}$, con lo que

$$B^{-1}(t')B(t) \approx e^{\lambda(t'-t)} I \quad (3.32)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov clásico.

Esta exponencial, que es la razón de este desarrollo, se evidencia en el resultado final bajo la aproximación

$$\langle \nabla \Sigma(\mathbf{q}_t, t) \cdot \nabla \Sigma(\mathbf{q}'_{t'}, t') \rangle \simeq (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}'}) \langle \Sigma(\mathbf{q}_t, t) \Sigma(\mathbf{q}'_{t'}, t') \rangle \quad (3.33)$$

y luego analizando los límites e interpolando. Finalmente el Eco de Loschmidt es

$$M(t) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int d\bar{\mathbf{p}}_s \left(\frac{m}{t} \right)^d C_s e^{-\frac{2\sigma^2}{\hbar} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{A} \right)^{d/2} e^{-\lambda t} = \bar{A} e^{-\lambda t} \quad (3.34)$$

Dado que Σ queda dentro del prefactor \bar{A} , la dependencia temporal en este régimen de pequeñas perturbaciones se debe al exponente λ y es independiente de la perturbación. Este resultado es de gran importancia, ya que relaciona el exponente de Lyapunov clásico λ con el caso cuántico, dejando en evidencia que efectivamente el caos cuántico existe y presenta características similares al caso clásico.

3.2.4. Términos no diagonales: Regla de Oro de Fermi

La hipótesis de alejamiento lineal con el tiempo en un sistema regular dada por [JP01] sirve para demostrar el decaimiento exponencial de la Regla de Oro de Fermi en el marco de la aproximación semiclásica. En este caso la contribución se realiza por los términos no diagonales de M ($s \neq s'$), por lo que los ΔS se pueden tomar como independientes y de contribuciones iguales. De allí se puede obtener el equivalente a las ecuaciones 3.37 (y C.28) de los casos caótico e integrable para los términos diagonales, pero para la contribución no diagonal. Esta es esencialmente la suma de propagadores medios en presencia de un medio de dispersión desordenado, el cual genera fases aleatorias que al ser promediadas sobre ensamble (trayectorias caóticas o perturbación desordenada) debe conducir a un decaimiento exponencial:

$$M^{nd}(t) \sim \langle e^{i\Delta S_s} \rangle = \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle \Sigma(\mathbf{q}(t')) \Sigma(\mathbf{q}(t'')) \rangle \right] \propto e^{-\Gamma t / \hbar} \quad (3.35)$$

La función de correlación del exponente decae naturalmente al seguir cada trayectoria a menos que existe una sintonía muy particular entre la trayectorias y la perturbación. Por tanto, incluso en el caso regular puede existir un régimen para el cual se sigue manteniendo la *FGR*. Si se prosigue con la cuenta este término se mantiene y solo cambian los prefactores.

En total, podemos afirmar que en el régimen caótico el decaimiento del Eco de Loschmidt esta gobernado por

$$\begin{aligned} M(t) &= M^{nd}(t) + M^d(t) \simeq \bar{A} e^{-\lambda t} + B e^{-\Gamma t / \hbar} \\ &\simeq e^{-t/\tau_\phi} \quad \text{con} \quad \tau_\phi = \lambda^{-1} + \hbar/\Gamma. \end{aligned}$$

lo que indica que a tiempos largos domina el proceso de decaimiento más lento.

3.3. Decaimiento en el caso integrable

3.3.1. Ley de potencias: $t^{d/2}$

En un régimen no completamente caótico se encuentra un decaimiento diferente. El resultado se obtiene siguiendo el mismo desarrollo semiclásico (en más detalle en el apéndice C.2), pero en lugar de asumir la hipótesis de un alejamiento exponencial (ecuación C.27) de dos puntos cualquiera en el espacio de fases $e^{\lambda(t'-t)}$, característico del caso caótico, se propone en la referencia [JAB03] un alejamiento lineal:

$$|\mathbf{q}(t') - \mathbf{q}'(t')| \approx (t'/t)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (3.36)$$

lo cual si bien parece bastante razonable para un sistema de dinámica regular, no necesariamente se cumplirá para todo sistema de este tipo. Sin entrar en detalles, las diferencias que aparecen con respecto al desarrollo anterior son las siguientes:

Tomar el promedio del eco se traduce en promediar el factor exponencial. Al aplicar 3.36 ese promedio resulta en el equivalente a la ecuación C.28 del caso caótico:

$$\langle e^{\frac{i}{\hbar}(\Delta S_s(t) - \Delta S_{s'}(t))} \rangle = e^{-\frac{1}{2}(\Delta S_s - \Delta S_{s'})^2} \quad (3.37)$$

La función correlación de fuerzas puede suponerse que decaerá velozmente, ya que Σ y \mathcal{H}_0 son independientes, entonces luego de la ecuación 3.33 (o C.29 del apéndice) se asumirá

$$\langle \nabla_i \Sigma(\mathbf{q}_t, t) \nabla_j \Sigma(\mathbf{q}'_{t'}, t') \rangle = U \delta_{ij} \delta(t' - t) \quad (3.38)$$

Reemplazando en 3.28 (o C.23 del apéndice) se obtiene:

$$\begin{aligned} M(t) &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_s C_s^2 \times \\ &\times \exp \left[-\frac{U}{2} \int_0^t dt' (t'/t)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \right] \times \\ &\times \exp \left[-2\sigma^2/\hbar |\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

(es el equivalente a C.34 del apéndice) tomando $\mathbf{r}_{\pm} = \mathbf{r} \pm \mathbf{r}'$ y realizando una integral Gaussiana que deja $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'$ obteniendo

$$M(t) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int \int d\mathbf{r}_+ d\mathbf{r}_- \sum_s C_s^2 e^{-\frac{U}{6}t|\mathbf{r}_-|^2} e^{-2\sigma^2/\hbar |\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_0|^2} \quad (3.40)$$

Un sistema regular clásico tiene $C_s \approx t^{-d}$, por lo que luego de integrar se llega a :

$$M(t) \propto t^{-3d/2} \quad (3.41)$$

donde el término $t^{d/2}$ es aportado por la integral Gaussiana y los prefactores que incluyen a U .

3.3.2. Otros regímenes de decaimiento en el caso integrable

En el régimen integrable pueden encontrarse muchos comportamientos dependiendo del sistema con que se trate. Esto es bastante razonable si se piensa que un sistema integrable puede tener la dinámica que uno desee. De esta manera buscando un Hamiltoniano y una perturbación en particular se puede obtener, al menos en principio, casi cualquier comportamiento para el Eco de Loschmidt.

En particular se han encontrado, además de los regímenes de esta sección, decaimientos mayores al de Lyapunov en el caso clásico [VP04], influidos también por la elección de las condiciones iniciales, en el caso de que el Hamiltoniano tenga regiones de estabilidad. En estos casos tomar el Eco de Loschmidt como la medida de la estabilidad de un sistema llevaría a la conclusión de que estos sistemas integrables son menos robustos que un sistema caótico. Esta clase de afirmación, que se encuentran en clara discordancia con los conceptos que diferencian la dinámica caótica de la integrable, llevó al interés de analizar la corrección a la definición del Eco de Loschmidt que se analiza en el capítulo 5.

También se han encontrado decaimientos en el régimen *FGR*, pero cuyo exponente no tiene una dependencia cuadrática con la perturbación [WVPC02, Cuc04]. Esto se debe a que la hipótesis de que la perturbación mezcla todos los niveles de manera tal que pueda reemplazarse por un promedio ya no es aplicable (en este caso la densidad local de estados es una Lorenziana centrada en la energía no perturbada [WC02], ver C.1). La razón se debe a que la perturbación tiene una tendencia a mezclar los niveles de energía con una tendencia hacia algunos estados. En este caso la *LDoS* ya no es una Lorenziana, y la conexión entre el ancho de ésta y el exponente de decaimiento del Eco de Loschmidt no sigue siendo válida.

3.4. Resumen: regímenes del Eco de Loschmidt

De las secciones anteriores se puede ver que el Eco de Loschmidt está mayormente descrito en el régimen caótico por

$$M(t) = \bar{A}e^{-\lambda t} + Be^{-\Gamma t/\hbar} \quad (3.42)$$

$$\underset{t \gg 0}{\propto} e^{-\min[\Gamma/\hbar, \lambda]t} \quad (3.43)$$

o podemos pensar en un tiempo de decaimiento τ_ϕ (*tiempo de Ehrenfest*)

$$1/\tau_\phi = 1/\tau_{FGR} + \lambda \quad (3.44)$$

$$\tau_\phi \simeq \text{mín}[\tau_{FGR}, 1/\lambda] \quad (3.45)$$

Entonces debemos esperar un cambio de fase en $\tau_{FGR} = 1/\lambda$ (i.e. $\Gamma = \hbar\lambda$). El régimen λ prevalece para perturbaciones fuertes, mientras que Γ prevalece para perturbaciones menores. Se debe recordar que para obtener \bar{A} hubo que suponer un estado inicial Gaussiano, por lo que salirse mucho de este esquema tornarían inválidos los resultados anteriores.

En resumen, los regímenes esperados para el decaimiento del Eco de Loschmidt a medida que aumentamos la perturbación e incrementamos el parámetro que controla el caos de un sistema resulta:

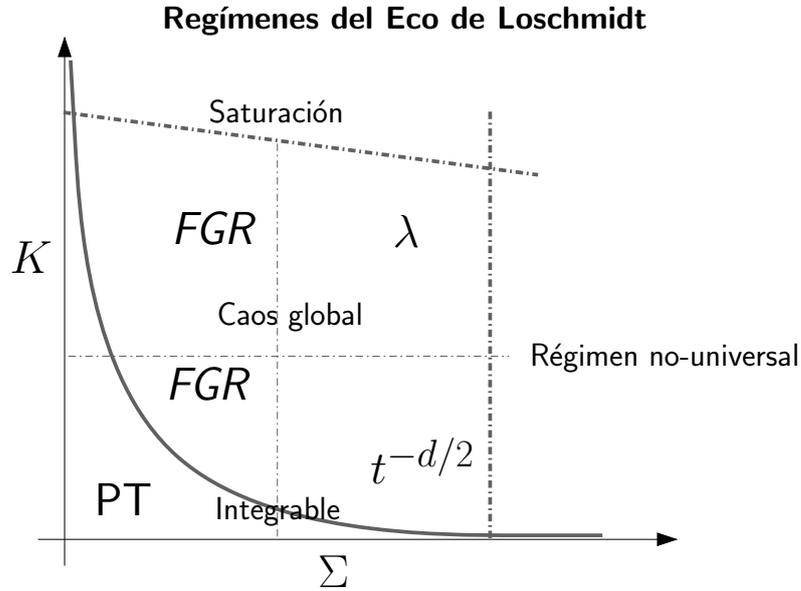


Figura 3.1: Regímenes del Eco de Loschmidt para sistemas cuánticos. K representa el parámetro del que depende el caos y Σ representa la intensidad de la perturbación. A valores muy grandes de K el sistema satura inmediatamente si el sistema es finito. El resto de los regímenes se explican debajo. Las líneas punteadas no son necesariamente rectas.

$t < \frac{\hbar}{\Sigma}$: Teoría de perturbaciones (*PT*). Como todas las interacciones en mecánica cuántica, los primeros instantes están gobernados por un ley paramétrica $1 - \Delta\Sigma^2 t^2$, donde $\Delta\Sigma^2$ es la desviación cuadrática media de \mathcal{H} . Esto también es válido para valores de Σ muy pequeños.

- $\Sigma \ll \Delta$: El modelo correcto es el de teoría de perturbaciones [Per84] (Δ es el espaciamiento entre niveles de energía). El decaimiento está gobernado por una Gaussiana cuyo exponente va como el cuadrado de la intensidad de la perturbación.
- $\Sigma > \Delta$: *FGR*, un decaimiento exponencial caracterizado por un exponente que es igual al ancho Γ de la densidad local de estados de la perturbación Σ . Γ tiene una dependencia generalmente cuadrática con respecto a la perturbación.
- $\Gamma > \hbar\lambda$: Lyapunov, un decaimiento exponencial caracterizado por un exponente λ de Lyapunov clásico [JP01].
- $\Sigma \gg \Delta$: Domina la dinámica de la perturbación Σ , por lo que no se puede hacer una generalización.

Capítulo 4

Modelos de mapas cuánticos “pateados” (“Periodically Driven Systems”)

Una de las motivaciones iniciales de este trabajo fue la de familiarizarse con modelos de mapas para el estudio de dinámica cuántica, ya que es posible implementarlos en un experimento de resonancia magnética nuclear. Por otra parte, dado que se trata de modelos unidimensionales que presentan caos dinámico resultan fáciles de resolver numéricamente.

Los sistemas conservativos de una dimensión no presentan caos. Los modelos de mapas son sistemas unidimensionales que tienen Hamiltonianos dependientes del tiempo que, típicamente, contienen δ de Dirac temporales. Esta propiedad permite el desarrollo de una dinámica caótica. La primera ventaja de un modelo caótico unidimensional salta a la vista; son numéricamente mucho más viables que un modelo de más dimensiones. Los sistemas cuánticos de por sí tienen una naturaleza compleja que los hace computacionalmente más pesados que su análogo clásico. Esta complejidad aumenta notablemente con la dimensión del espacio, por lo que necesariamente se debe acudir a largos tiempos de cálculo o grandes computadoras. Esto permanece válido aún cuando se usen algoritmos muy eficientes como el método de *Trotter-Suzuki* [Cuc04]. Para los mapas cuánticos, una simulación a tiempos largos que presenta caos global puede realizarse en una computadora personal en pocos minutos, lo cual posibilita analizar las muchas características de los sistemas caóticos sin necesidad de recurrir a un gran poder de cálculo.

La otra ventaja que motivó la utilización de estos modelos es su semejanza con los sistemas de espines. Este grupo de investigación (*LaNAIS* de *RMS*) se dedica en su parte experimental a la Resonancia Magnética Nuclear (*NMR*) en Sólidos. Los modelos de mapas cuánticos pueden ayudar a comprender la dinámica en

sistemas de espines, así como también se pueden llevar a cabo realizaciones experimentales de estos modelos [HEMC06].

4.1. Teoría de Floquet

Si bien para entender los casos que estudiaremos basta con conocimientos más simples de mecánica cuántica, voy a dedicar una sección a la teoría de Floquet, ya que es la teoría detrás de todos estos modelos periódicos. La idea es resolver la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (4.1)$$

para sistemas periódicos (notar que el campo de aplicación es mucho más amplio que solo el caos cuántico). Una forma de afrontar el problema es resolviendo el llamado *mapa u operador de Floquet*. Suponemos un Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \epsilon V G(t) \quad (4.2)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño y V es el operador potencial (independiente del tiempo, al igual que \mathcal{H}_0). La dependencia está en la función periódica $G(t)$, de período τ . Asumiendo que la ecuación de Schrödinger tiene autoestados $|\psi_{i(t)}\rangle$

$$|\psi_{i(t)}\rangle = e^{-i\frac{\Omega_i}{\hbar}t} |\Phi_{i(t)}\rangle \quad (4.3)$$

donde $|\Phi_{i(t)}\rangle$ es el i -ésimo estado de Floquet con parámetro de Floquet asociado Ω_i . Estos estados de Floquet son solución de \mathcal{H}'

$$\mathcal{H}' |\Phi_{i(t)}\rangle = \left(\mathcal{H}(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\Phi_{i(t)}\rangle = \Omega_i |\Phi_{i(t)}\rangle \quad (4.4)$$

con lo que se puede expandir cualquier vector en esta base, en particular el vector de onda

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle = \sum_i \langle \Phi_{i(t)} | \psi_0 \rangle e^{-i\frac{\Omega_i}{\hbar}t} |\Phi_{i(t)}\rangle \quad (4.5)$$

Usando la periodicidad τ en los estados de Floquet se obtiene

$$|\psi(\tau)\rangle = \sum_i e^{-i\frac{\Omega_i}{\hbar}\tau} \langle \Phi_{i(0)} | \psi_0 \rangle |\Phi_{i(0)}\rangle \quad (4.6)$$

A partir del estado en $t = 0$ se obtiene el estado a $t = \tau$ (como se muestra en la figura 4.1, esto es en la versión clásica un mapeo, por lo que se le dio el nombre de “mapas”). Esto se puede extender a tiempo $t = n\tau$ aplicando n veces

$$|\psi(n\tau)\rangle = F^n |\psi_0\rangle \quad (4.7)$$

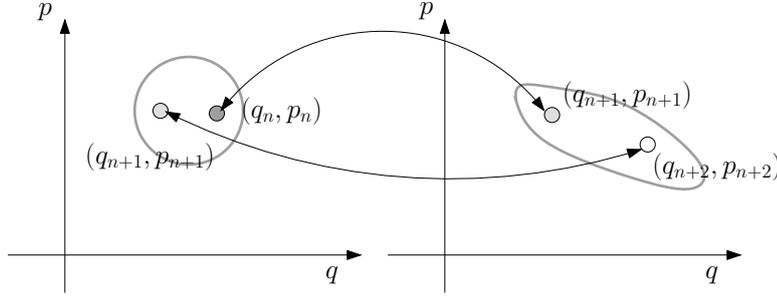


Figura 4.1: Esquema de un mapeo clásico. A cada punto en el espacio de fases le corresponde un y solo un nuevo punto. En el caso cuántico lo que se mapea son los estados $\psi = \sum a_n |n\rangle$ (que son infinitos debido a la posibilidad de elegir todos los a_n) y a cada uno le corresponde uno y solo un nuevo estado debido a la acción del operador unitario F .

donde se usa el operador de Floquet

$$F = \sum_i e^{-i\frac{\Omega_i}{\hbar}\tau} |\Phi_{i(0)}\rangle \langle \Phi_{i(0)}| \quad (4.8)$$

Para un caso simple en el cual $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, como los que veremos en las siguientes secciones, F no es más que el operador evolución temporal a tiempo τ , i.e. $F = U(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\tau}$, lo cual es la razón por la que los siguientes modelos pueden ser comprendidos sin conocer la teoría de Floquet.

4.2. "Trompo pateado" (Kicked Top)

El primer modelo que vamos a considerar es el llamado *Kicked Top*, definido en [Haa00]. El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\pi}{2\tau} S_x + \frac{K}{2S} S_z^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \quad (4.9)$$

donde τ es el período que tendrá el mapa, $n \in \mathbb{Z}$, S es la magnitud del espín, es decir

$$\begin{aligned} S^2 |m, s\rangle &= S(S+1) |m, s\rangle \\ S_z |m, s\rangle &= m |m, s\rangle \end{aligned}$$

K es el llamado parámetro de torsión, por razones que explico más adelante, y es el parámetro que controla la integrabilidad del sistema.

La dinámica de este mapa es la de un espín precesando alrededor del eje x con un período 4τ (el primer término de 4.9) mientras que recibe cada un período τ una rotación instantánea (“patada”) proporcional a su proyección sobre el eje z (su número cuántico m). Éste último término es responsable del régimen integrable o caótico del sistema, dependiendo del valor de K . La división por S es necesaria para que el Hamiltoniano no aumente el tamaño del spin, manteniendo la dimensión $d = 1$, ya que este se encuentra siempre en una esfera de radio S y la única variable es K .

4.2.1. Versión Clásica

Las variables conjugadas son $(\varphi, \cos(\theta))$. Este es un mapa ya que a cada punto del espacio le asigna un nuevo punto

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= z_n \cos(Kx_n) + y_n \sin(Kx_n) \\y_{n+1} &= -z_n \sin(Kx_n) + y_n \cos(Kx_n) \\z_{n+1} &= -x_n\end{aligned}\tag{4.10}$$

lo cual define al mapa clásico del *Kicked Top*.

Es muy ilustrativo analizar la versión clásica del mapa. Como puede verse en las figuras 4.2, para valores del parámetro de torsión K muy pequeños (o nulo) el espín precesa alrededor de un eje, con su punta trazando una circunferencia sobre una esfera de radio S , y cada punto en esta circunferencia se encuentra inmediatamente después de el correspondiente a la anterior iteración (precesa un ángulo pequeño). A medida que se aumenta el valor de K esta circunferencia trazada por el espín comienza a torcerse (de allí el nombre de parámetro de torsión). A medida que K aumenta, los puntos en la curva que traza sobre la esfera comienzan a alejarse cada vez más del correspondiente a la iteración anterior (precesa un ángulo comparable a π). Se llega así a un valor para el cual todos los puntos de la esfera son alcanzables en cualquier momento, es decir que un punto llega a estar prácticamente descorrelacionado del anterior, el sistema se encuentra en un régimen caótico. La anterior imagen corresponde al límite $S \rightarrow \infty$ para el caso cuántico, pero vestigios de este comportamiento pueden verse analizando el diagrama de fases cuántico (la función de Wigner descripta en la sección 2.2), como se verá más adelante.

4.2.2. Versión Cuántica

Para resolver la dinámica de este Hamiltoniano recurrimos, como habíamos dicho, a resolver el operador de Floquet F (sección 4.1, si bien su lectura no es imprescindible para comprender el desarrollo). Dado que el Hamiltoniano no

Trayectorias del mapa Kicked Top clásico

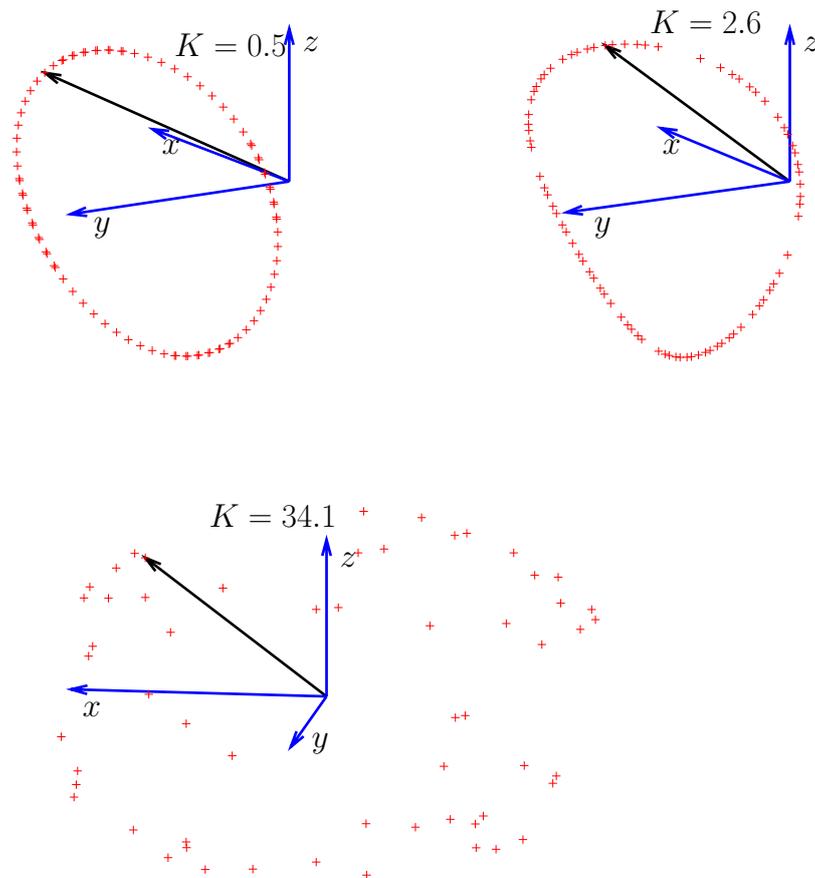


Figura 4.2: Trayectorias del *Kicked Top* clásico. Los ejes están representados en azul y el spin clásico en negro. Este espín apunta sobre los puntos rojos, que son puntos (x, y, z) de alguna iteración. Se puede ver que a medida que se aumenta el parámetro de torsión K la trayectoria deja de ser una circunferencia (se "tuerce" de allí el nombre) para apuntar en forma aleatoria sobre cualquier punto en la esfera de radio S .

tiene dependencia temporal excepto por δs , la derivada temporal de \mathcal{H} es nula, entonces $F = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \mathcal{H} dt}$ es la matriz evolución temporal a tiempo τ . En los instantes $n\tau$ el término constante es despreciable comparado con el que tiene $\delta(t - n\tau)$. Por ello se puede ignorar a la hora de integrar, dejando como resultado el operador de Floquet

$$F_0 = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \mathcal{H} dt}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \mathcal{H} dt}} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau^-}^\tau \mathcal{H} dt}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{K}{2S} S_z^2}} \quad (4.11)$$

con esto el vector de estado a tiempo $n\tau$ estará dado por

$$|\psi(n\tau)\rangle = F_0^n |\psi_0\rangle \quad (4.12)$$

Es interesante tener en cuenta que la ecuación 4.11 puede escribirse como $F_0 = e^{i\mathcal{H}'t/\hbar}$, donde \mathcal{H}' es alguna matriz Hermitiana, ya que F_0 es unitario. Esta matriz \mathcal{H}' sería algún Hamiltoniano ficticio capaz de generar una dinámica caótica.

Estamos ahora en condición de analizar el comportamiento de este mapa. Primero analizaremos el comportamiento para $K = 0$, es decir que tenemos un espín precesando en un campo transversal al eje de cuantización (figura 4.3).

Como el caso semiclásico dibuja esta trayectoria circular en la esfera, esperamos que $\cos(\theta)$ y ϕ varíen monotonamente, por lo que la trayectoria del paquete en el espacio de fases sería una elipse. Para este mapa con $K \ll 1$ el paquete coherente nunca se separa, se mantiene su naturaleza semiclásica y el centro de su distribución en el espacio de fases se mueve, pero la distribución alrededor de este centro nunca cambia significativamente. Al comenzar a aumentar el parámetro de torsión K el paquete comienza a perder coherencia de un período a otro, y se desparrama alrededor del centro del espacio de fases ($\cos(\theta) = 0, \varphi = 0$) como se ve en la figura 4.4. En esta figura el comportamiento no llega a ser caótico, pero el paquete coherente inicial no se conserva y se forman estados no localizados (lo cual es evidente en las oscilaciones radiales en la función de Wigner). De este régimen puede apreciarse que este mapa tiende a llevar el centro de la distribución hacia el centro del espacio de fases.

Si se toma un valor de K en el régimen de caos global, cualquier paquete inicial coherente presentará un comportamiento caótico como los descritos en la sección 3.2. La función de Wigner correspondiente puede verse en las figuras 4.5. En estas se observa como un estado inicial coherente en pocas iteraciones comienza a aumentar rápidamente el soporte del estado en el espacio de fases, formando estados muy deslocalizados hasta llegar a un estado completamente aleatorio que ocupa todo el espacio disponible (saturación). Esta saturación se debe a que el espacio es finito, poniéndole freno al aumento exponencial. Es

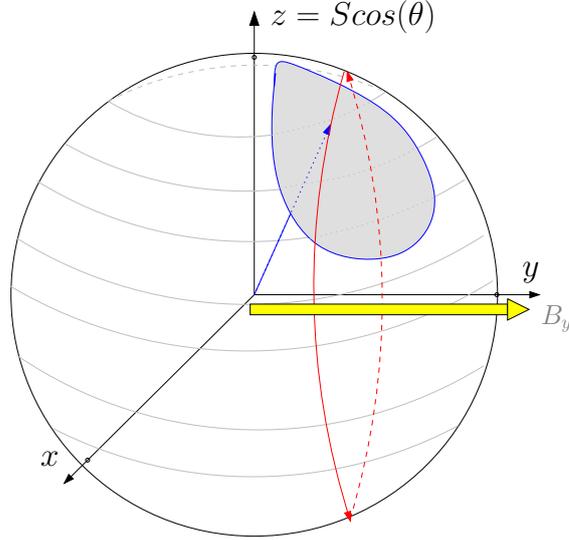


Figura 4.3: Esquema de un paquete coherente precesando en un campo transversal B_x . Las líneas claras sobre la esfera de radio S indican la cuantización de las órbitas en S_z . El área gris sobre la misma esfera indica la distribución que tendría un paquete coherente en un instante, el cual precesaría trazando una trayectoria circular centrada en el eje x .

importante notar que luego de llegar a esta saturación el estado sigue siendo aleatorio en las siguientes iteraciones (salvo recurrencias espontáneas), pero éste cambia completamente de una iteración a la siguiente, es decir que se descorrelaciona casi totalmente de una iteración a la siguiente ($\langle \psi(t) | \psi(t + \tau) \rangle \simeq 0$), algo presente en sistemas caóticos.

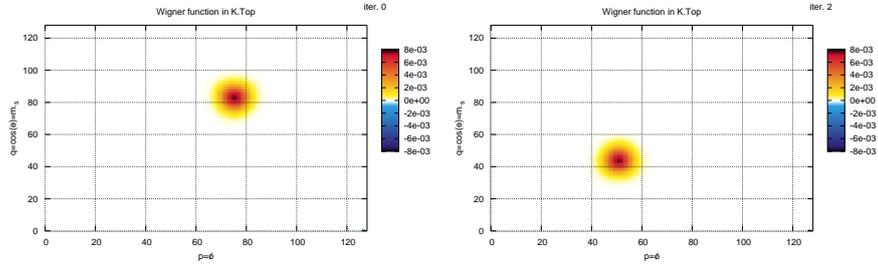
Habiendo analizado el comportamiento en el espacio de fases de este sistema, nos dedicaremos a un análisis más cuantitativo: el del Eco de Loschmidt. Para esto debemos definir una evolución con un Hamiltoniano perturbado. Esta perturbación será un "golpe" de campo transversal en la misma dirección en la que el espín precesa, pero ligeramente atrasado ($\epsilon \rightarrow 0$) con respecto al término S_z^2 :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Sigma \quad (4.13)$$

$$\Sigma = \phi S_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau + \epsilon) \quad (4.14)$$

de modo que el operador de Floquet correspondiente a la evolución perturbada

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Top para un caso integrable con $K = 0,01$



Evolución en el espacio de fases para el Kicked Top para un caso integrable con $K = 5$

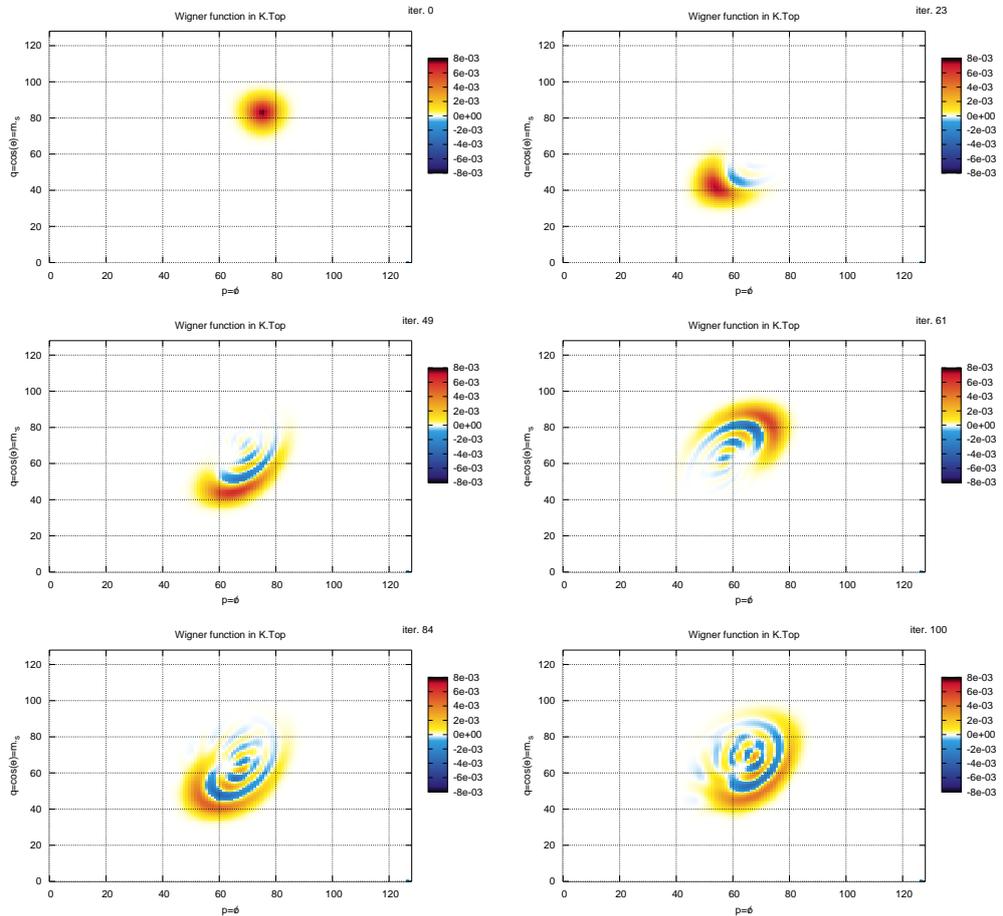


Figura 4.4: Evolución temporal del *Kicked Top* en el caso integrable $K = 0,01$ (primera línea) y $K = 0,7$, dimensión del espacio de Hilbert 128. Para $K = 0,01$ el paquete solo se mueve alrededor del centro del espacio de fases prácticamente sin deformarse. En $K = 0,7$ la dinámica es regular pero no se trata tan solo de traslaciones triviales, sino que se forman estados de superposición. Notar que este mapa tiende a llevar el centro de la distribución hacia $p, q = 0$.

4.2. "TROMPO PATEADO" (KICKED TOP)

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Top para un caso caótico con $K = 5$

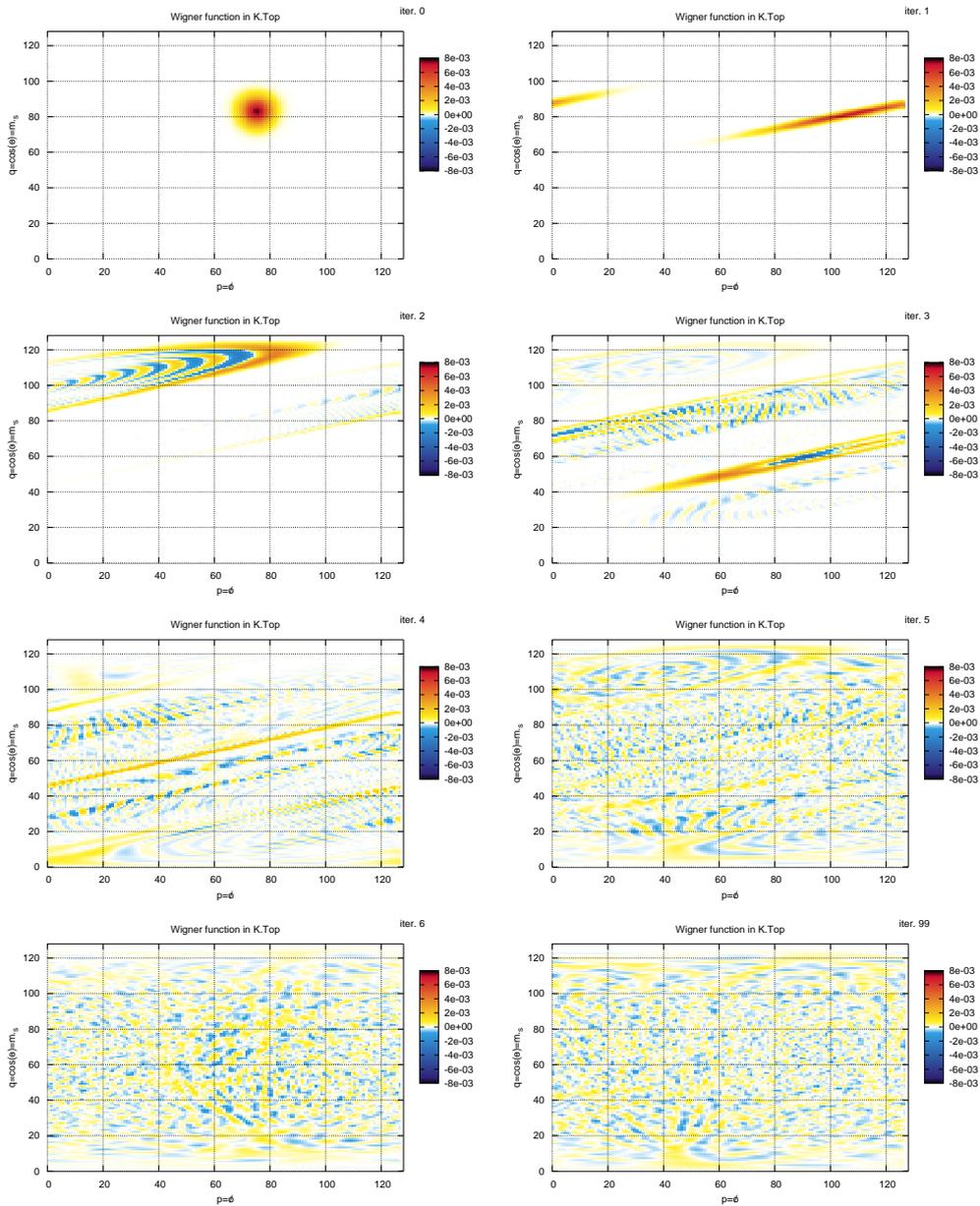


Figura 4.5: Evolución temporal del *Kicked Top* en el caso caótico $K = 5$, dimensión del espacio de Hilbert 128. En este valor de K no toda condición inicial evoluciona caoticamente, pero en este caso el decaimiento es Lyapunov.

es

$$F = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\pi}{2} S_x}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau^-} \mathcal{H} dt}} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{K}{2S} S_z^2}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau^-}^{\tau} \mathcal{H} dt}} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \phi S_x}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau}^{\tau+\epsilon} \mathcal{H} dt}} \quad (4.15)$$

El efecto de esta perturbación es el de hacer que el spin precese más rápido, en definitiva hacer que el paquete gire un ángulo $\pi/2 + \phi$ en lugar de $\pi/2$. En la imagen semicásica del espacio de fases correspondería a que el paquete se mueve más rápido en el caso perturbado, por lo que el producto $|\langle \psi_{\Sigma}(t) | \psi(t) \rangle|^2 = \sum_{q,p} W_{\Sigma}(q,p) W(q,p)$ tendería a decrecer más rápido que con una perturbación que no tenga una dirección privilegiada. Esta elección tiene un motivo: la perturbación tiene un comportamiento con clara interpretación clásica. La importancia de esta propiedad será el tema del capítulo 5.

Así el Eco de Loschmidt a tiempo $n\tau$ queda definido como (tomando $\tau = 1$ por simplicidad)

$$M(n) = |\langle \psi_0 | F^{\dagger n} F_0^n | \psi_0 \rangle|^2 \quad (4.16)$$

Los detalles sobre el cálculo numérico se encuentran en el apéndice D.1. Algunos resultados se encuentran en la figura 4.6, donde pueden observarse los gráficos para el Eco de Loschmidt en casos caóticos y de dinámica regular. La escala es logarítmica en $|M(t)|$ y lineal en el tiempo (iteraciones del mapa), de modo que el decaimiento exponencial se evidenciará como rectas.

En la figura 4.7 pueden encontrarse los exponentes del decaimiento en el régimen *FGR*. Puede observarse una dependencia cuadrática en el exponente del decaimiento con respecto a la magnitud de la perturbación ϕ , lo cual es lo que se estudió en el capítulo 3 para el régimen *FGR*.

En la figura 4.8 se muestra la densidad local de estados para cualquier autoestado del Hamiltoniano perturbado en la base de autoestados de la evolución sin perturbar. Esta ajusta perfectamente con una Lorenziana, por lo que el desarrollo de la *FGR* puede aplicarse perfectamente. A partir del ancho de esta Lorenziana puede calcularse el exponente de decaimiento, lo cual no es estudiado en detalle en este trabajo, ya que se encuentra en [JAB03] precisamente para este mapa con una perturbación similar.

Otra característica interesante del *Kicked Top* es que el régimen *FGR* es fácilmente alcanzable. Esto no es así en el régimen Lyapunov debido a que en el régimen de caos global se cumple $\lambda > 1$ mientras que el ancho de banda es $\pi/2 > \Gamma$. Entonces $\Gamma < \lambda$, con lo cual el decaimiento es *FGR*. Para lograr un decaimiento de Lyapunov se necesitan valores de λ menores, los cuales se pueden encontrar en la región de caos débil, donde hay una dependencia del régimen de decaimiento con la región donde se encuentre la condición inicial. Esta transición

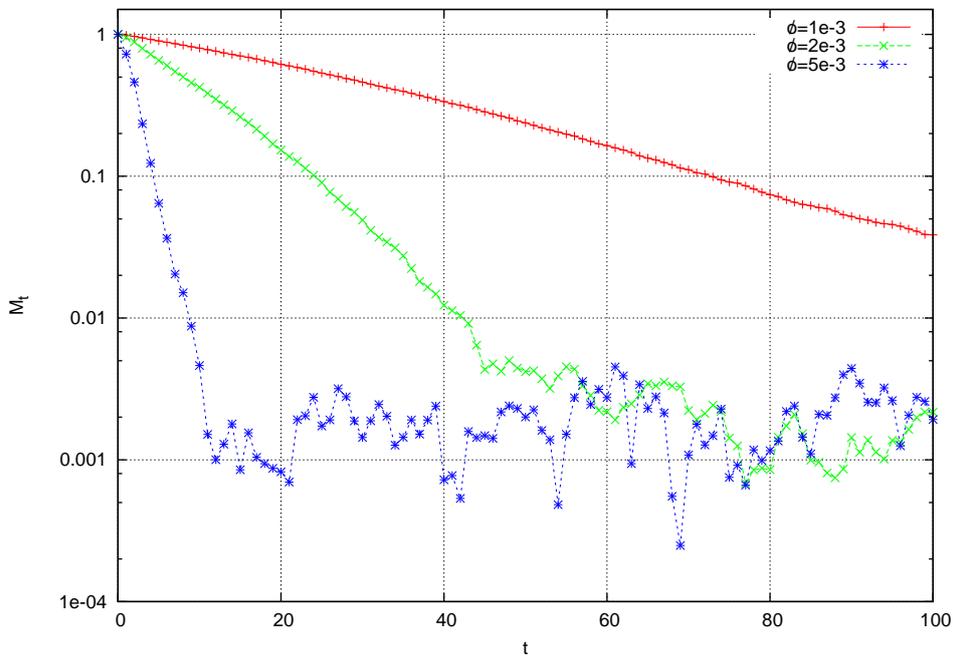
Ecos de Loschmidt para el Kicked Top, $2S + 1 = 512$.

Figura 4.6: En la figura se muestran los decaimientos para el Eco de Loschmidt en el caso caótico $K = 21,1$, para valores de la perturbación $\phi = 1 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}$. El exponente del decaimiento aumenta con la perturbación.

Exponentes Γ para el Kicked Top, $2S + 1 = 512$.

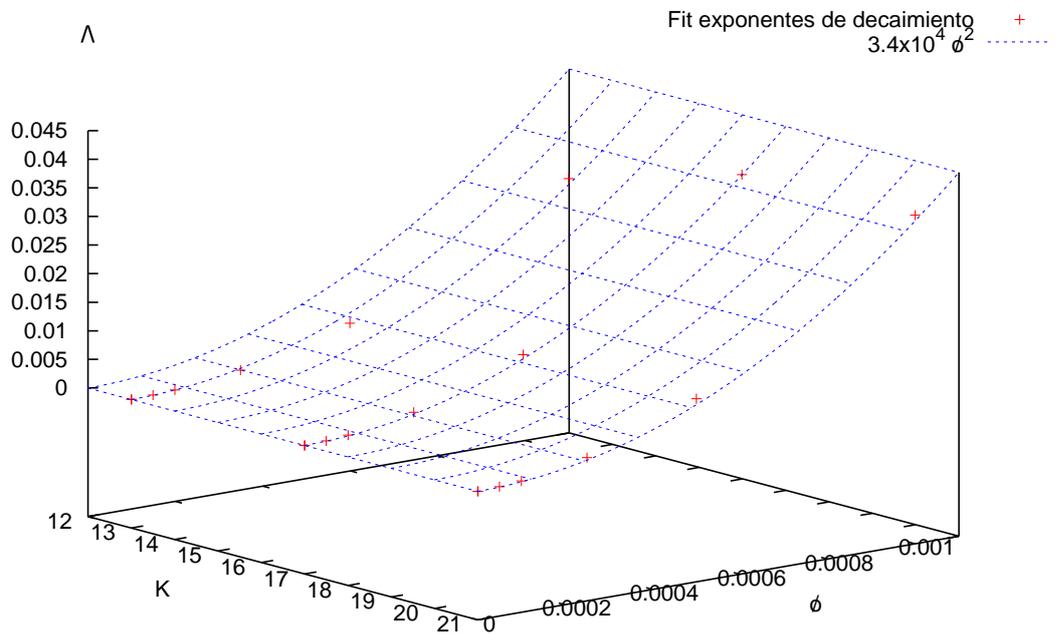


Figura 4.7: En la figura se muestran los exponentes de decaimiento en el régimen *FGR* para el *Kicked Top*. La dependencia es cuadrática en la perturbación, aunque existe alguna dependencia en K (notar que para los menores valores de K el exponente crece con una ley cuadrática pero con una menor prefactor). Los exponentes son muy pequeños porque se eligieron perturbaciones pequeñas, con la intención de tener más cantidad de puntos antes de la saturación y obtener un mejor ajuste.

Densidad local de estados (LDoS) para algunos autoestados del Kicked Top, $2S + 1 = 512$.

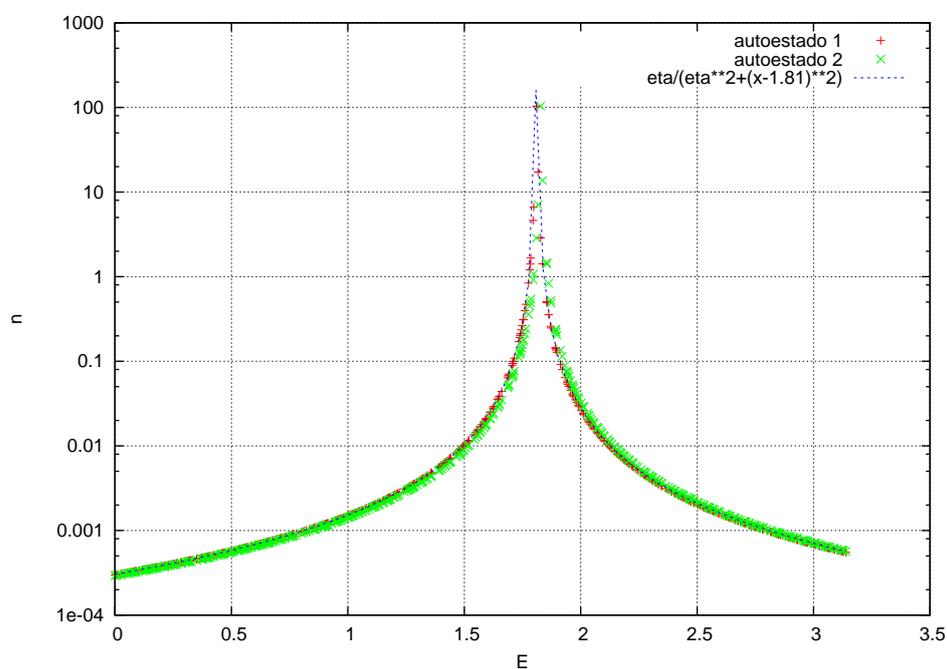


Figura 4.8: En la figura se muestran las densidades locales de estados ($LDoS$) de dos autoestados de energías cercanas (esta elección es para que estén centradas en la misma energía y así poder comparar los anchos, mostrando que son iguales). La curva azul es una Lorentziana de ancho $\eta = 1 \times 10^{-3}$, centrada en $E = 1,81$. El decaimiento en este caso tiene exponente $\Gamma/\hbar = 1,2 \times 10^{-6}$. Si reemplazamos \hbar por $2N = 1024$ obtenemos el ancho de la Lorentziana correcto, $\Gamma \simeq 10^{-3}$.

Exponentes λ para el Kicked Rotator, dimensión 512.

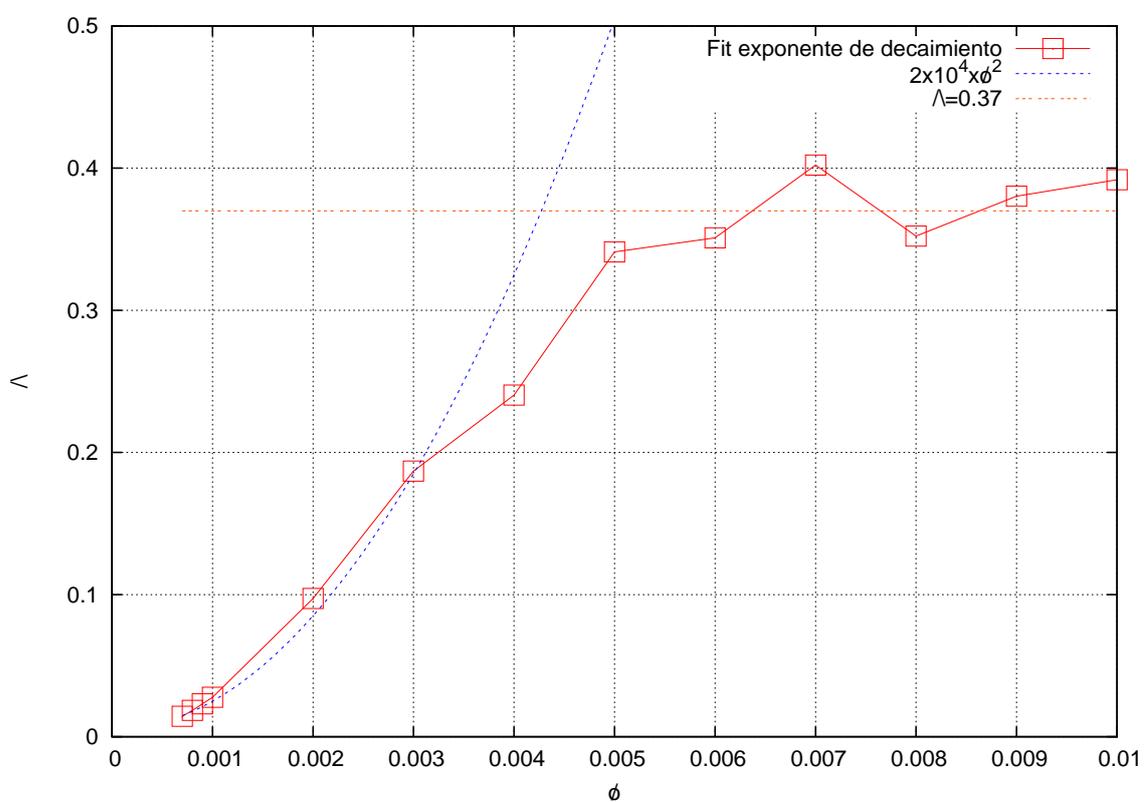


Figura 4.9: En la figura se muestra la transición del régimen *FGR* al régimen Lyapunov dado por la ecuación 3.45, al aumentar el valor de la perturbación en el *Kicked Top* para $K = 4,5$, donde el caos no es global.

se muestra para un valor de K en la figura 4.9. Un análisis más exhaustivo del decaimiento en este régimen requeriría de un estudio de las regiones de estabilidad y los exponentes λ del caso clásico, lo cual va más allá del interés en este trabajo, pero ha sido estudiado en [JSB01] y otros artículos.

En cuanto a la implementación, en el programa utilizado para el *Kicked Top* las matrices F_0 y F son diagonalizadas¹, ya que la multiplicación de las matrices de evolución produce demasiado error² y la forma del Hamiltoniano no permite usar *Trotter-Suzuki*. La diagonalización, a pesar de ser un procedimiento computacionalmente caro, termina siendo el camino más eficiente si se quiere llegar a tiempos muy largos o si se quiere promediar sobre un gran número de estados iniciales (ya que solo corresponde una diagonalización para todos los estados). Los tiempos de cómputo son aproximadamente en una computadora personal³ unos 10 minutos para hacer 10 promedios sobre estados iniciales con una dimensión $2S+1 = 512$, donde $1/3$ del tiempo se dedica a la diagonalización. Con este equipo se puede llegar hasta dimensión $2S + 1 = 1024$ antes de tener que usar la memoria virtual.

4.3. Kicked Rotator o mapa cuántico estándar

El *Kicked Rotator* es probablemente el mapa cuántico más estudiado. Éste se reduce en el límite clásico al mapa estándar de Chirikov, el cual ha sido largamente estudiado [Haa00] y ha encontrado mucha utilidad en distintas áreas. Además presenta muchas características interesantes, como difusión en el espacio de momentos e incluso un régimen de localización dinámica que es asimilable a la localización de Anderson. Estas características lo llevan a su nombre de mapa “estándar”.

El mapa depende de un solo parámetro y su evolución puede calcularse muy eficientemente mediante transformadas de Fourier rápidas (*FFT*), lo cual le da relevancia también para simulaciones por computadoras cuánticas a través de la transformada de Fourier cuántica (*QFT*) [GS01, HEMC06].

La versión clásica se caracteriza por dos variables conjugadas momento-ángulo (I, φ)

$$I_{t+1} = I_t + k \sin(\Theta_t) \quad (4.17)$$

$$\Theta_{t+1} = \Theta_t + T I_{t+1} \quad (4.18)$$

¹La rutina utilizada para diagonalizar matrices se encuentra en el paquete de código libre “*LAPACK 3.0*” [ABB⁺99].

²En dimensiones mayores a $2S + 1 = 128$ utilizando números de doble precisión, encontramos que en pocas iteraciones los errores numéricos favorecen notablemente el crecimiento del peso algún autoestado de F , por lo que la evolución deja de ser correcta

³AMD Sempron 1.51Ghz, 256Mb RAM 333Mhz, corriendo en Linux Kernel 2.6.7

que desarrollan su dinámica en un cilindro con periodicidad 2π en φ . k y T son parámetros. Este cilindro puede cerrarse en un toro de largo $N = 2\pi L/T$, con L entero, obteniendo una periodicidad en la variable I , obteniendo un espacio de fases finito (si solo pensamos en una celda) como en el *Kicked Top*. La dinámica clásica entonces tiene un solo parámetro que gobierna el tipo de dinámica, el cual es $K = kT$. Si $K > 0,9716\dots$ el caos se hace global, mientras que las trayectorias más robustas se encuentran para $(1 + \sqrt{5})/2$. La versión cuántica se caracteriza por el operador de Floquet

$$F_0 = e^{-\frac{i}{\hbar}k \cos(\hat{\Theta})} e^{-\frac{i}{\hbar}T\hat{I}^2/2} \quad (4.19)$$

donde $\hat{I} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \Theta}$. El límite clásico se consigue tomando $K = kT = \text{cte.}$, $k \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$.

Las bases donde el operador $\hat{\Theta}$ es diagonal (base Θ) y donde el operador \hat{I} es diagonal (base I) están relacionadas por una transformada de Fourier discreta, por lo que la forma más eficiente de calcular una evolución es evaluar las iteraciones del mapa una por una. El procedimiento consiste en descomponer el operador de Floquet en sus operaciones elementales. Primero se debe evaluar $|\psi_\Sigma(t)\rangle_I = e^{-\frac{i}{\hbar}T\hat{I}^2/2}|\psi_t\rangle_I$ en su base I , luego transformar el resultado a la base conjugada ($|\psi_\Sigma(t)\rangle_\Theta = \mathcal{F}[|\psi_\Sigma(t)\rangle_I]$) y luego aplicar la evolución correspondiente al otro operador exponencial ($|\psi_{t+1}\rangle_\Theta = e^{-\frac{i}{\hbar}k \cos(\hat{\Theta})}|\psi_\Sigma(t)\rangle_\Theta$). Finalmente, se devuelve a la base original para terminar la iteración ($|\psi_{t+1}\rangle_I = \mathcal{F}[|\psi_{t+1}\rangle_\Theta]$). El programa se encuentra en el apéndice D.2. Para el cálculo numérico de la dinámica cuántica es conveniente elegir $T = 2\pi/N$ con $N \in \mathbb{N}$ para mantener el espacio de fases constante [LGS03]. En este caso el límite clásico se consigue con $N \rightarrow \infty$, es decir, aumentando la dimensión del espacio de Hilbert (de la misma manera que en el *Kicked Top*).

Ahora vamos a analizar la dinámica en el espacio de fases de este mapa, lo cual resultará de gran relevancia más adelante. Primero el caso perfectamente integrable $K = 0$. La evolución en el espacio de fases puede verse en las figuras 4.10. En ellas se ve que un estado inicial coherente separa en “tiras” en el espacio de fases, como “enrollándose” en el cilindro de la coordenada Θ . Estas tiras vuelven a juntarse en dos paquetes de envolvente parecida a estados coherentes con franjas de interferencia. Estos paquetes separados en la coordenada Θ , pero con el mismo I , vuelven a formar franjas alrededor de la coordenada Θ y luego forman tres paquetes con características similares a la de los dos paquetes anteriormente mencionados. Luego la dinámica es la misma pero a la inversa, se forman dos paquetes y luego de una cantidad exacta de iteraciones el paquete inicial coherente vuelve a formarse. La dinámica es regular pero el paquete coherente se desarma y vuelve a armar, a diferencia del *Kicked Top*, donde el paquete nunca se desarmaba. Esto tiene una influencia muy grande en el decaimiento del

4.3. KICKED ROTATOR O MAPA CUÁNTICO ESTÁNDAR

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Rotator para el caso integrable $K = 0$

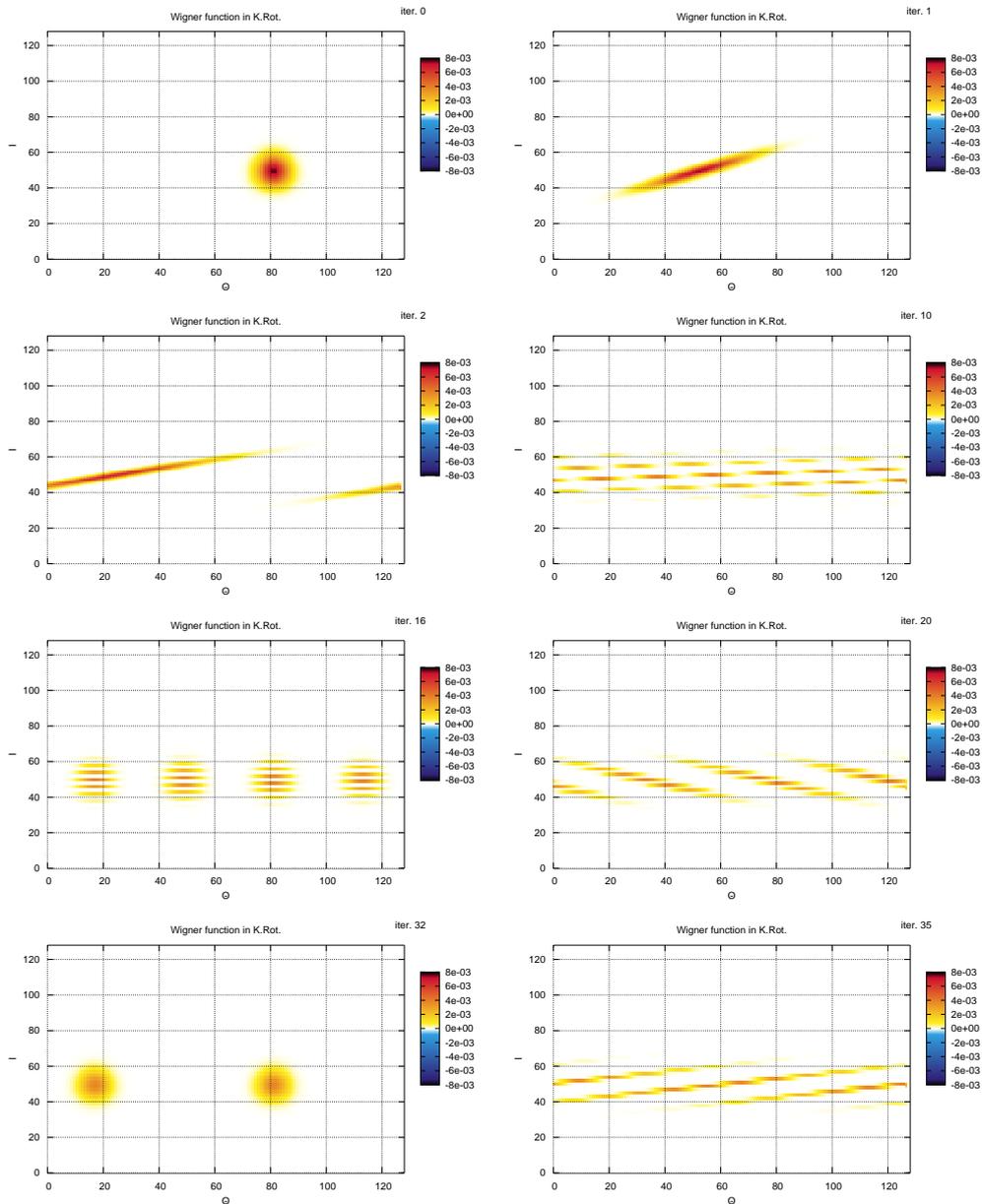


Figura 4.10: Evolución temporal del *Kicked Rotator* en el caso integrable $K = 0$, dimensión del espacio de Hilbert 128. La dinámica se repite *exactamente* cada 64 iteraciones. El paquete coherente inicial se desarma y rearma en otros varias veces durante la dinámica, por lo que, a diferencia del *Kicked Top*, no nos encontramos en el caso de simples traslaciones triviales, por lo que la corrección no funciona más allá de los primeros instantes.

Eco de Loschmidt para casos integrables. Puede verse de aquí que este mapa no conservará el centro de las distribuciones en el espacio de fases.

En el caso caótico puede observarse en las figuras 4.13 como los estados de superposición se expanden rápidamente por todo el espacio de fases (más velozmente en la coordenada I) hasta llegar a una distribución aleatoria que se descorrelaciona totalmente de una iteración a la siguiente.

Para calcular el Eco de Loschmidt se eligió en manera análoga al *Kicked Top* una perturbación que “acelere” la dinámica, que en este caso la elección es tomar un mayor $T' = T + \phi$.

Algunos gráficos para el Eco de Loschmidt se encuentran en las figura 4.12. El régimen de decaimiento exponencial FGR se aclanza para valores más pequeños de la perturbación que en el caso del *Kicked Top*, pero ese puede ser tan solo un efecto de la perturbación elegida. En este régimen el exponente crece cuadráticamente con la perturbación, lo cual está de acuerdo con la deducción teórica (figura 4.11).

En cuanto a la implementación, utilizar la FFT para la evolución es muy eficiente y no produce los errores que produciría la multiplicación de matrices. Asu vez, es un procedimiento computacionalmente mucho más liviano que la diagonalización, que se uso para el *Kicked Top*. La desventaja con respecto a la diagonalización es que se debe pasar por todas las iteraciones antes de llegar a un tiempo deseado, por lo que para tiempos largos es una gran desventaja. La diagonalización permite llegar al tiempo que se desee con la cantidad de pasos que se desee, ya que la matriz F diagonalizada puede ser elevada a cualquier exponente indistintamente. Los tiempos de cómputo en una computadora personal ⁴ son aproximadamente 5 minutos para hacer 10 promedios sobre estados iniciales con una dimensión del espacio de Hilbert $N = 512$. Con este equipo se puede calcular a dimensiones mayores a $N = 1024$ antes de tener que usar la memoria virtual, por lo que es un procedimiento que demanda mucha menos cantidad memoria RAM (en esto influye también que utiliza menos matrices) que el de diagonalización, utilizado en el *Kicked Top*.

⁴AMD Sempron 1.51Ghz, 256Mb RAM 333Mhz, corriendo en Linux Kernel 2.6.7

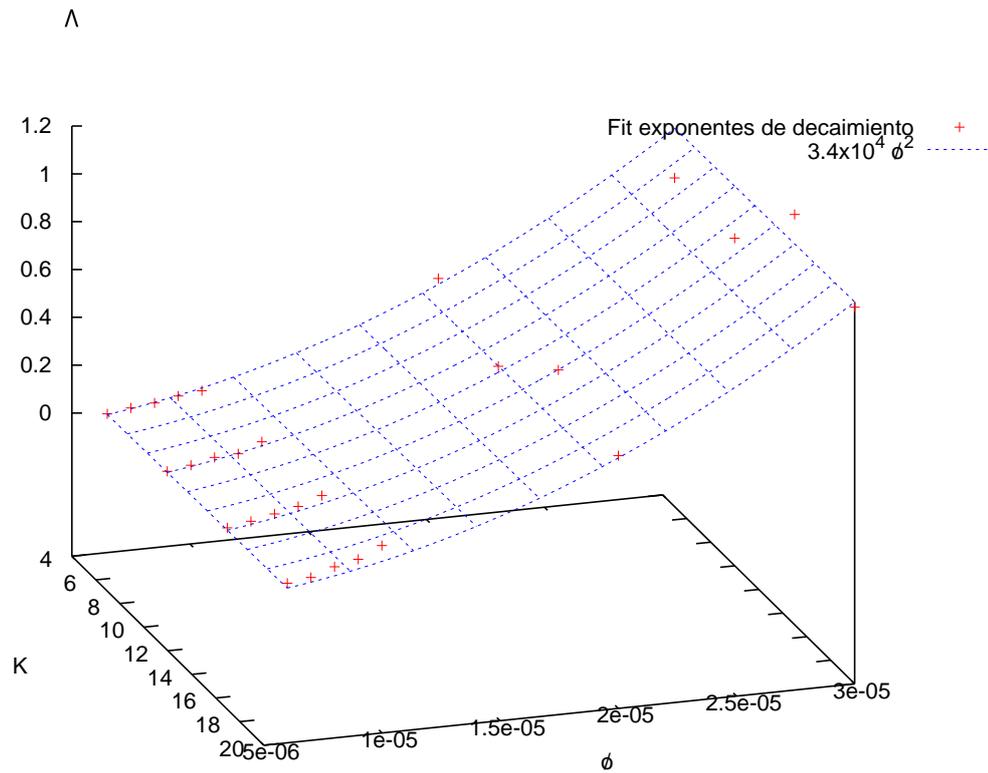
Exponentes Γ para el Kicked Rotator, dimensión 512.

Figura 4.11: En la figura se muestran los exponentes de decaimiento en el régimen *FGR* para el *Kicked Rotator*. La dependencia es cuadrática en la perturbación, pero los exponentes para valores de perturbación más grandes no ajustan tan bien en la parábola, probablemente por la poca cantidad de puntos para el ajuste (el decaimiento era demasiado rápido).

Ecoss de Loschmidt para el Kicked Rotator, dimensión 512.

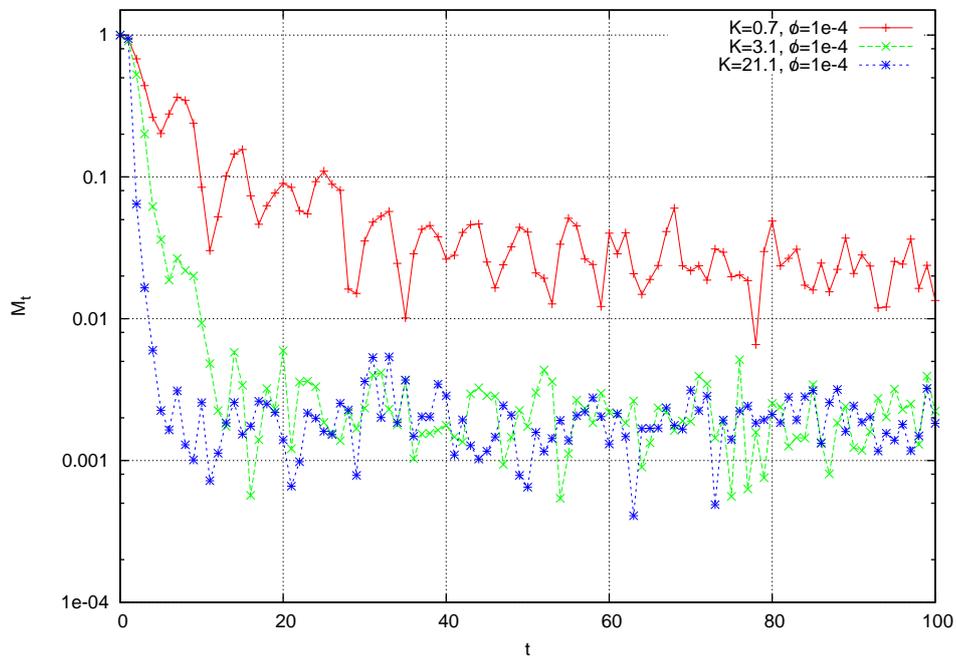


Figura 4.12: Ecoss de Loschmidt para $K = 0,7$ (integrable), 3,1y 21,1 (caóticos), con una perturbación $\phi = 10^{-4}$. El decaimiento tiende a ser exponencial (y más rápido) a medida que aumentamos el valor de K . Los casos caóticos saturan en un valor del Eco de Loschmidt del orden de la inversa de la dimensión del espacio de Hilbert ($1/512$).

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Rotator para el caso caótico $K = 0$

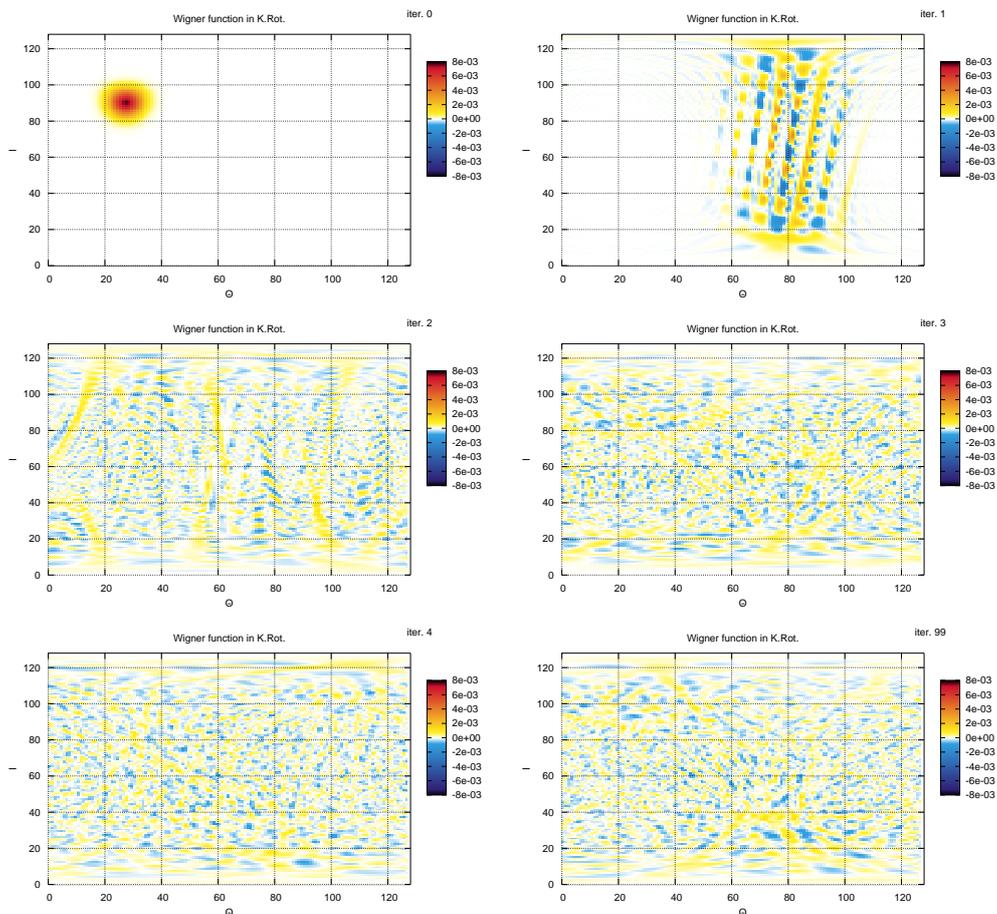


Figura 4.13: Evolución temporal del *Kicked Rotator* en el caso integrable $K = 0$, dimensión del espacio de Hilbert 128. El estado inicial coherente rápidamente comienza a aumentar exponencialmente su dispersión cuadrática media (más velozmente en la coordenada I), hasta saturar al llenar el espacio disponible. El comportamiento luego de algunas iteraciones es completamente aleatorio.

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Rotator con $K = 0,5$

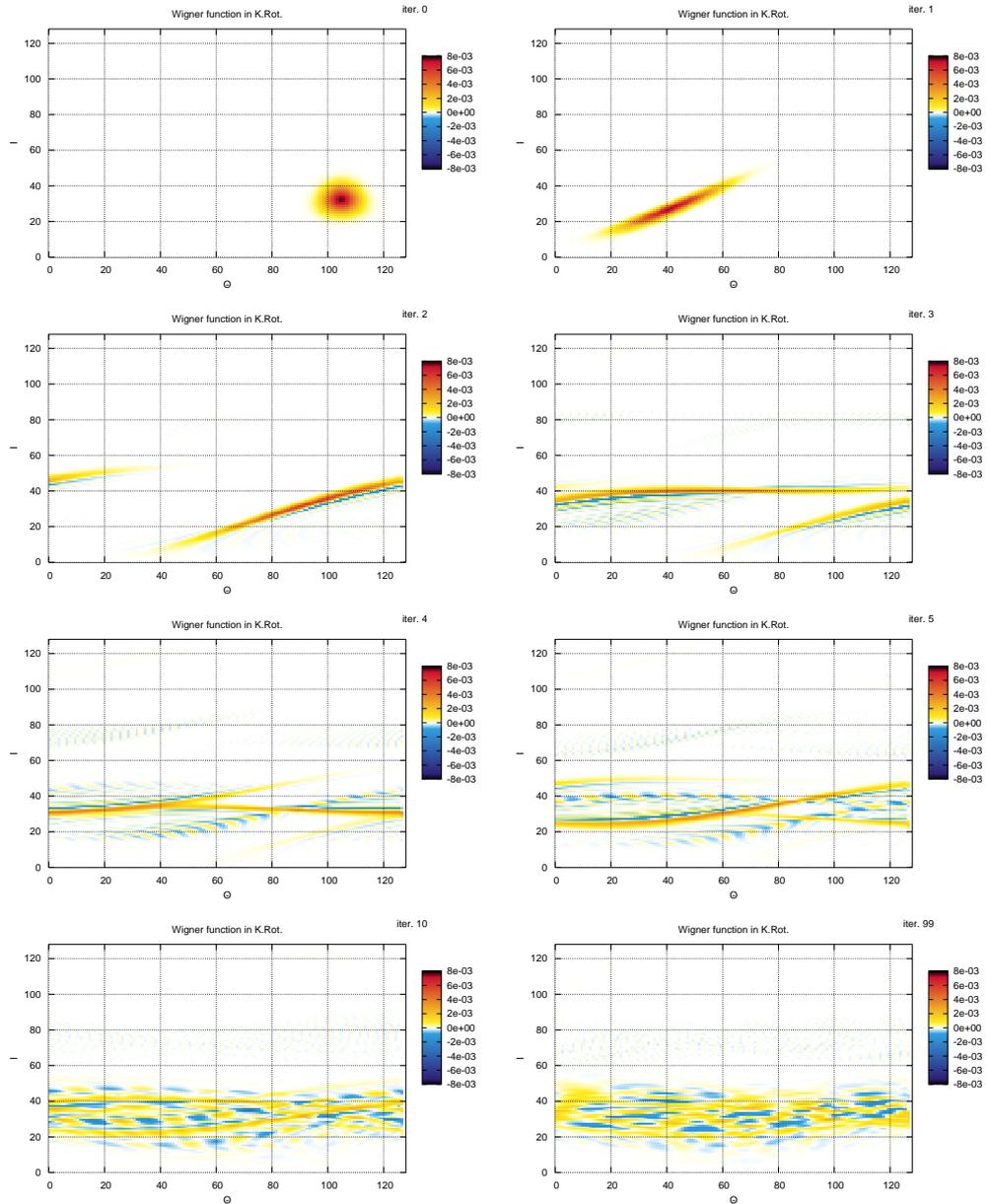


Figura 4.14: Evolución temporal del *Kicked Rotator* en el caso $K = 0,5$, dimensión del espacio de Hilbert 128. En este caso la dinámica no es caótica pero tampoco es periódica (el caos global aparece aproximadamente en $K = 1$). El estado inicial coherente tiende a llenar el espacio en la coordenada Θ , pero permanece acotado en la coordenada I .

Capítulo 5

Corrección del Eco de Loschmidt para sistemas integrables

Como se mencionó en la introducción, hay resultados en la literatura en los que sistemas integrables decaen más rápido que los sistemas caóticos, lo cual llevó a la interpretación de que estos sistemas de dinámica regular serían más sensibles a perturbaciones que un sistema con dinámica caótica (e.g. [VP04]). Esto contradice la intuición y lleva la hipótesis de que la definición estándar del Eco de Loschmidt no es la magnitud correcta para cuantificar la sensibilidad de un sistema de dinámica regular. La razón en la dinámica de un sistema integrable puede pensarse que un paquete coherente no se deforma demasiado, mientras que puede sufrir traslaciones. Por ello un par de distribuciones coherentes en el espacio de fases podrían, en principio, separarse tan rápido como se desee. En un sistema caótico, en contraste, un estado se expande en todas las direcciones posibles del espacio de fases. Esto no necesariamente quiere decir que el sistema sea más sensible a perturbaciones, sino que éste tiene una tendencia a moverse en alguna dirección del espacio de fases.

La proposición es hacer el producto interno de los estados con distintas evoluciones, pero referido a sus respectivos centros de distribución en el espacio de fases. Es decir

$$|M(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_{\Sigma}(q - \bar{q}^{\Sigma}, p - \bar{p}^{\Sigma}; t) W^0(q - \bar{q}^0, p - \bar{p}^0; t)$$

El argumento es explicado en más detalle en la siguiente sección. Luego se presentan los resultados numéricos de la implementación a los modelos descritos en el capítulo 4, así como las conclusiones obtenidas de ello.

Eco de Loschmidt en el espacio de fases para el caso caótico

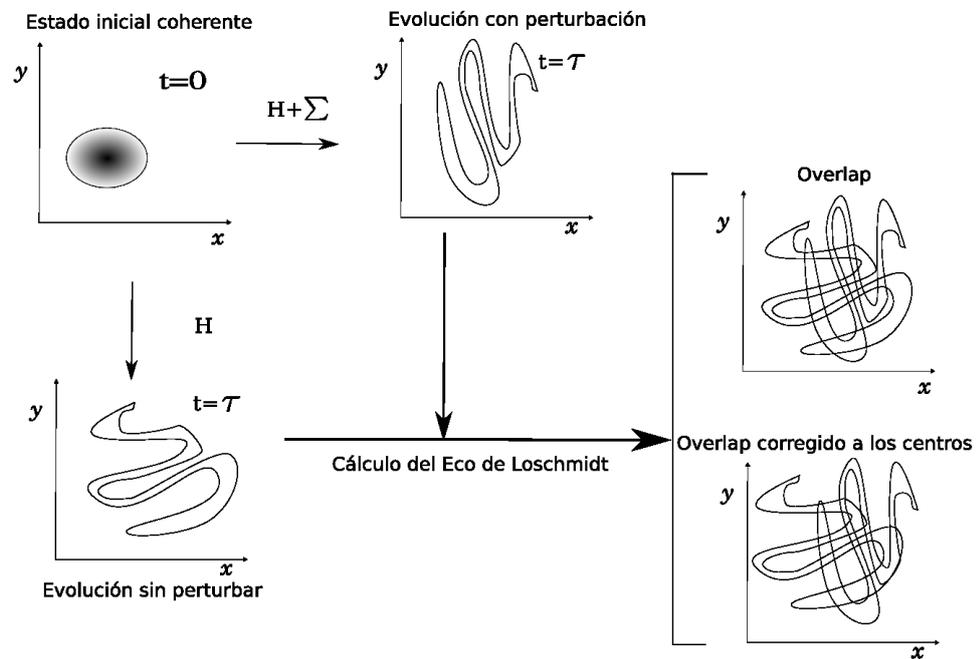


Figura 5.1: Como puede verse en el esquema, la dinámica caótica tiende a ocupar todo el espacio de fases, en todas las direcciones por igual, por lo que una comparación desde el centro de masa u otro punto sería un indicativo de la sensibilidad de un sistema ante perturbaciones, independientemente de la dinámica causada por la perturbación.

5.1. Descripción del problema

En el caso de dinámica caótica, esquematizado en la figura 5.1, el sistema tiene una tendencia a aumentar cualquier dispersión exponencialmente y en todas direcciones. Es decir que una perturbación se repartiría igualmente en todas las direcciones por más que tenga una dirección privilegiada. Así las distribuciones que evolucionaron con y sin perturbación pueden ser totalmente diferentes pero sus centros se comportarían de la misma manera. Por ello el Eco de Loschmidt en su definición estándar dependería de las características del Hamiltoniano sin perturbar y no tanto de la dinámica que provoque la perturbación. Entonces en el caso caótico la definición existente si es un estimativo correcto de la sensibilidad de un sistema.

Al generalizar esta definición a sistemas integrables aparece un problema. En la figura 5.2 se muestra una distribución inicial (imagen en el ángulo superior izquierdo) que evoluciona con el Hamiltoniano H , resultando luego de un tiempo τ un desplazamiento en la dirección y (imagen debajo del estado inicial). Si al mismo estado inicial se lo hace evolucionar bajo el mismo Hamiltoniano, pero con una perturbación Σ que provoca un desplazamiento en la dirección x , obtenemos a tiempo τ una distribución similar, pero corrida (imagen a la derecha de la correspondiente al estado inicial).

El Eco de Loschmidt correspondiente a este sistema con esa perturbación se calcula a partir del *overlap* o superposición entre los estados a tiempo τ (imagen a la derecha, arriba), y la velocidad de decaimiento de éste sería un indicativo de la sensibilidad ante perturbaciones del Hamiltoniano. Dado que el estado inicial sufrió una traslación diferente para el caso perturbado, la superposición entre los estados ha decaído velozmente hasta resultar prácticamente nula. Esto indicaría que se trata de un Hamiltoniano muy sensible a perturbaciones. Sin embargo las distribuciones no son diferentes. Si comparamos desde sus centros de masa y momentos (imagen a la derecha, abajo) la superposición indica que tenemos distribuciones prácticamente iguales, es decir que este Hamiltoniano no tendría sensibilidad a la perturbación, sino solo que ésta tiene una tendencia a mover la distribución en alguna dirección.

Entonces resulta evidente que el computo del decaimiento resultará diferente en ambos casos, lo relevante es la ley con la que decaerá. Dependiendo de las características del sistema, esta ley de decaimiento cambiará o no, revelándonos si la pérdida de información estaba siendo computada correctamente.

Eco de Loschmidt en el espacio de fases para el caso de traslaciones

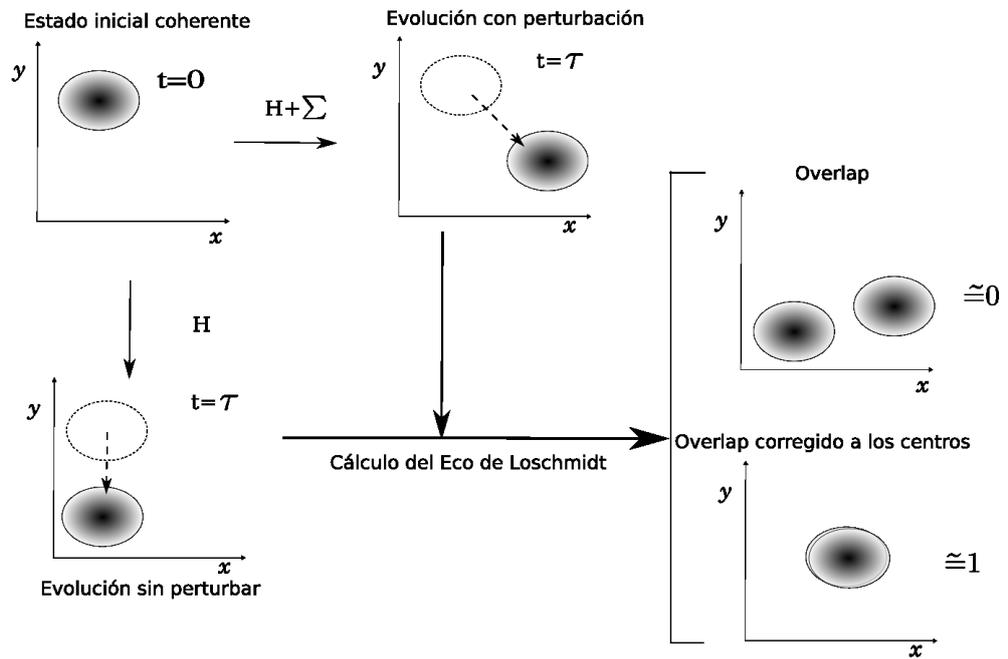


Figura 5.2: Esta figura es similar a 5.1, pero para el caso de una dinámica regular que solo produce traslaciones triviales en el espacio de fases. En principio esta clase de dinámica se consideraría sumamente robusta. Sin embargo el Eco de Loschmidt en su definición estándar decae muy velozmente ya que la evolución perturbada traslada el paquete en una dirección diferente a la evolución no perturbada. Si se calcula el eco con respecto a los respectivos centros de las distribuciones se encontrará un decaimiento prácticamente nulo, indicando una gran robustez en la dinámica. Este resultado está mucho más de acuerdo con la imagen intuitiva del problema.

5.2. Implementación

Como se indicó en el capítulo 2, la representación del espacio de fases cuántico está dado por la función de Wigner $W(q, p)$, y el Eco de Loschmidt se puede calcular por

$$|M(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_{\Sigma}(q, p; t) W_0(q, p; t) \quad (5.1)$$

mientras que el valor medio de un operador se calcula por

$$\langle O \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W(q, p; t) O(q, p; t) \quad (5.2)$$

entonces la corrección del Eco de Loschmidt a los centros de las distribuciones que se desea, como se describió en la anterior sección correspondería a

Definición 5.1 (Corrección al Eco de Loschmidt para el caso integrable)

$$|M(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_{\Sigma}(q - \bar{q}^{\Sigma}, p - \bar{p}^{\Sigma}; t) W^0(q - \bar{q}^0, p - \bar{p}^0; t)$$

donde

$$\bar{p}^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_0(q, p; t) p \quad (5.3)$$

$$\bar{p}^{\Sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_{\Sigma}(q, p; t) p \quad (5.4)$$

$$\bar{q}^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_0(q, p; t) q \quad (5.5)$$

$$\bar{q}^{\Sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dqdp W_{\Sigma}(q, p; t) q \quad (5.6)$$

que son el valor medio de q o p usual en su respectiva distribución.

¿Qué es el centro de la distribución en un espacio periódico?

La conveniencia de usar una definición modificada del Eco de Loschmidt es la hipótesis central de este trabajo. Según nuestra hipótesis, se espera que el decaimiento en el valor del Eco de Loschmidt Corregido para el caso de sistemas integrables sea menor que en los casos caóticos. Para probar el comportamiento de esta definición utilizaremos los modelos de mapas implementados en el

capítulo 4. Al igual que sucedió con la función de Wigner, la implementación correcta en sistemas discretos y de dimensión finita tiene algunos detalles que se deben considerar. Estos sistemas finitos se piensan con condiciones de contorno periódicas, por lo que una definición del centro de la distribución equivalente a las ecuaciones 5.3, $\bar{p} = \frac{1}{4N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} W(q, p; t)p$ (y lo equivalente para q) no daría siempre el punto que minimiza la distancia cuadrática media. Esto queda más claro al observar la figura 5.3. El centro de masa depende de la celda de la periodicidad elegida.

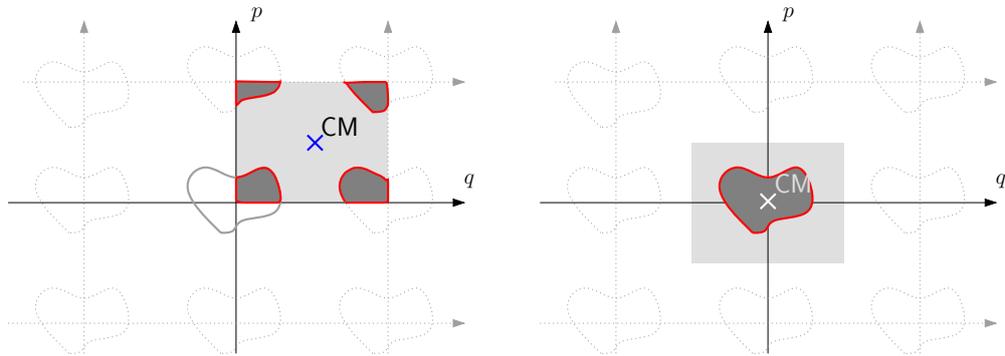


Figura 5.3: En el espacio periódico la definición del centro de una distribución como el valor medio de el vector posición es dependiente de la celda unidad que se escoja. Por ello hay que volver a una definición más básica, como lo es el punto donde se minimiza la dispersión cuadrática media. De este modo se obtiene el mismo centro con respecto a la celda, independientemente del origen elegido (el punto (q_{CM}, p_{CM}) es equivalente a $(q_{CM} \pm nN, p_{CM} \pm nN)$, donde N es la periodicidad).

Para sobrellevar este problema se debe volver a la definición de centro de la distribución. Por simplicidad pensemos en una distribución en una sola coordenada x , entonces la definición del centro de la distribución es

$$\bar{x} \in [-\infty, \infty] \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \rho(x) dx \text{ es mínimo} \quad (5.7)$$

La cual sería la definición que hay que llevar al espacio periódico. En el caso continuo esto lleva a la definición que se esperaba inicialmente, ya que la anterior definición puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \rho(x) dx = 0 \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x} \rho(x) dx = \bar{x} \quad (5.9)$$

En el discreto con periodicidad esto es falso en el caso general. Para calcular el centro de la distribución correctamente hay que calcular esta dispersión para todos los posibles \bar{x} en una celda centrada en este punto. Si la dimensión del espacio es N , el centro de la distribución sería

$$\bar{x} \in 0 \dots N - 1 \text{ tal que } \sum_{x=\bar{x}-N/2}^{\bar{x}+N/2-1} (x - \bar{x})^2 \rho(x \bmod [N]) \text{ es mínimo} \quad (5.10)$$

donde la periodicidad del espacio se evidencia en que el argumento de ρ es periódico en N . Hacer este cálculo supone calcular N sumas de N elementos para cada coordenada, para cada distribución y cada tiempo t . Esto en principio puede parecer mucho, pero en la práctica es muy liviano en comparación del resto de las operaciones involucradas en la resolución de un sistema cuántico. El código se encuentra en el apéndice D.3 y básicamente consiste en calcular primero las distribuciones marginales en p y en q ($\rho(p) = \sum_q W(q, p)/4N$ el equivalente para q) y luego aplicar la ecuación 5.10 para cada coordenada.

En cuanto al rango donde se estudiará la corrección, resultan de interés los tiempos en los que la fidelidad no ha decaído significativamente (tiempos cortos), ya que ésta es la región donde se procesa la información cuántica.

5.3. Resultados numéricos

5.3.1. Kicked Top

Para el caso perfectamente integrable la corrección al Eco de Loschmidt se muestra en las figuras 5.4 y 5.5. Puede verse que en este caso el argumento presentado el comienzo de este capítulo se aplica casi a la perfección, ya que el paquete solo se traslada en el espacio de fases prácticamente sin deformarse. Esto lleva a que se elimine el decaimiento en el eco, que en la definición estándar tiene un decaimiento Gaussiano con renacimientos periódicos (ver figuras 5.9 y 5.6).

A medida que se tiende al caso caótico la corrección comienza a decaer inicialmente con mayor velocidad que la definición estándar, pero saturando en un valor más alto.

En el caso en el que se desarrolla caos global encontramos que la corrección satura al valor $1/N$ (al mismo valor que saturará el eco estándar) en un tiempo mucho más corto (ver figura 4.6). La explicación para este efecto, que en la figura semiclásica parece imposible, es que la corrección actúa como una perturbación muy fuerte. En el caso caótico la función de Wigner presenta estructuras muy pequeñas (oscilaciones entre valores positivos y negativos), que hacen el

Ecos de Loschmidt corregidos en el Kicked Top, $2S + 1 = 512$, en el caso integrable

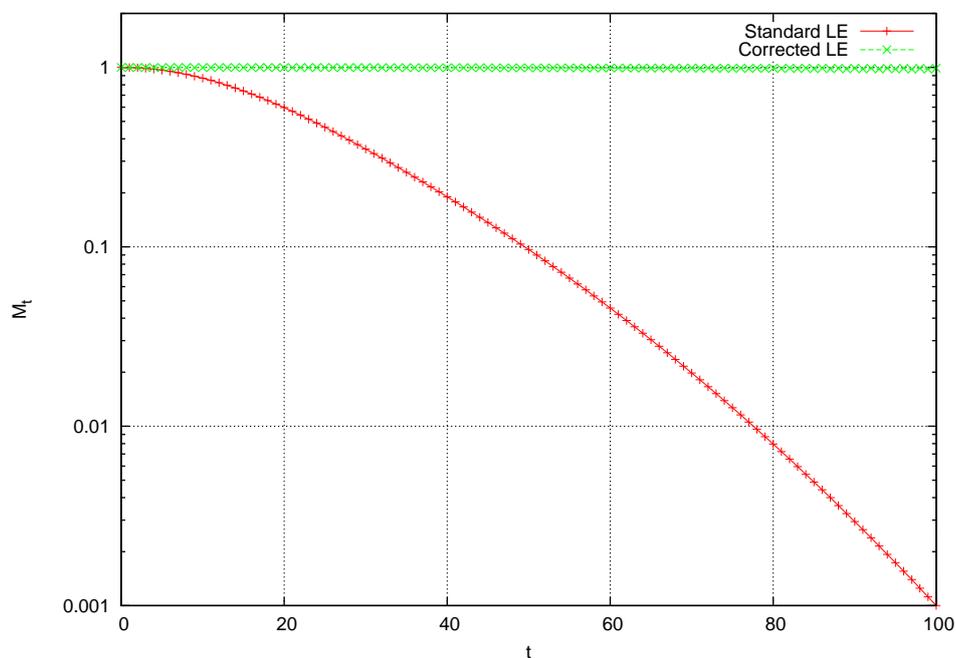


Figura 5.4: La figura muestra la corrección para el Eco de Loschmidt en un caso perfectamente integrable $K = 0$, $\phi = 10^{-3}$. En este caso todo funciona según la deducción y la corrección es perfecta, no muestra decaimiento. La versión sin corrección decae como una Gaussiana en el tiempo.

Ecos de Loschmidt corregidos para el Kicked Top, $2S + 1 = 512$, en el caso caótico.

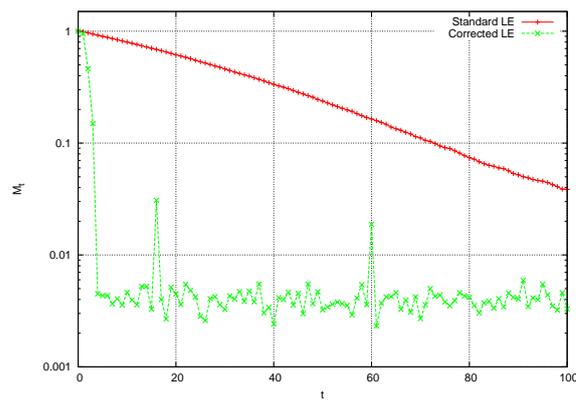
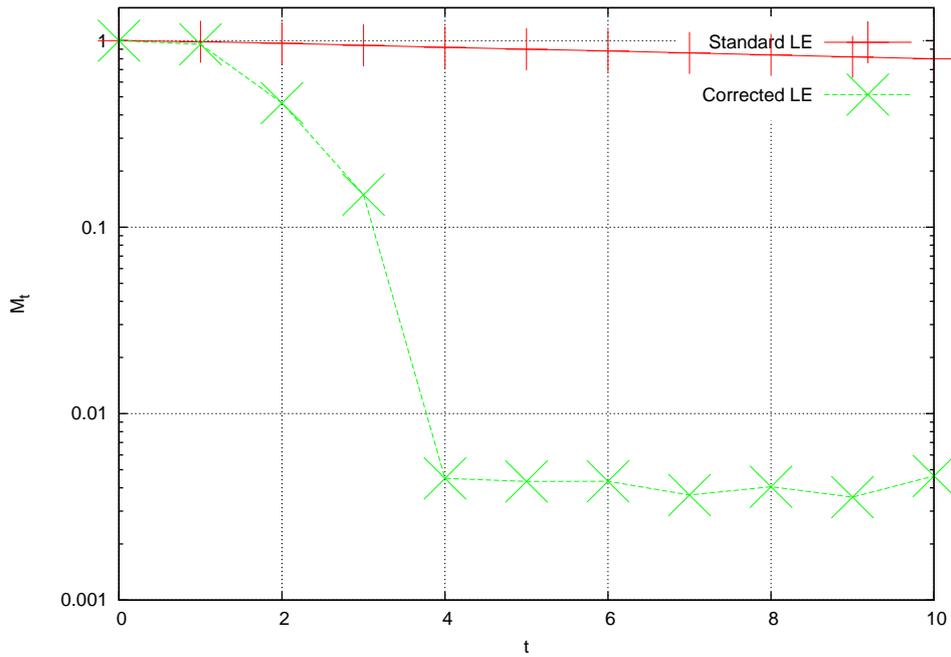
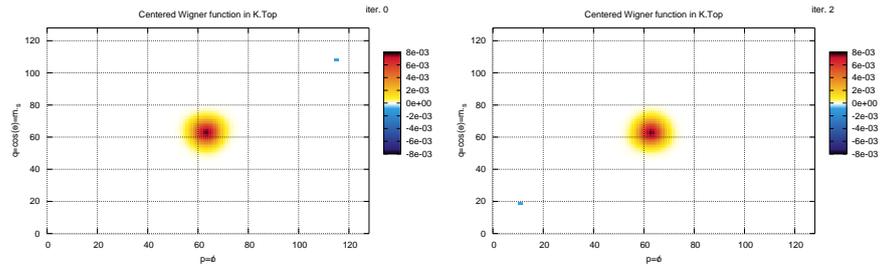


Figura 5.5: La figura muestra la corrección para el Eco de Loschmidt en un caso caótico $K = 21,1, \phi = 10^{-3}$, régimen *FGR*. En éste caso la corrección satura rápidamente al valor $1/S$. La figura de abajo es una ampliación a tiempos largos.

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Top para un caso integrable llevado al centro de la distribución, con $K = 0,01$



Evolución en el espacio de fases para el Kicked Top para un caso integrable llevado al centro de la distribución, con $K = 0,7$

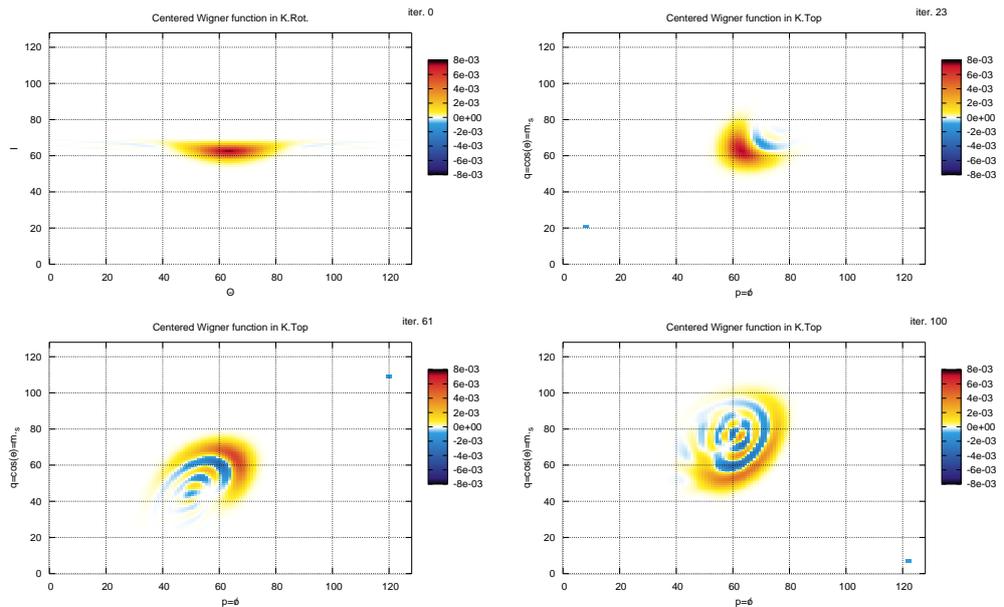


Figura 5.6: Evolución temporal del *Kicked Top* en el caso integrable $K = 0,01$ (primera línea) y $K = 0,7$, dimensión del espacio de Hilbert 128 (comparar con 4.4). Para $K = 0,01$ el paquete solo se movía sin deformarse, por ello la corrección es casi perfecta y no se evidencia un decaimiento. En $K = 0,7$ la dinámica es regular pero no se trata tan solo de traslaciones triviales. Sin embargo hay un centro de valores positivos bien marcado, por lo que la corrección sigue funcionando, aunque en menor medida.

Evolución en el espacio de fases para el Kicked Top para un caso caótico llevado al centro de la distribución, con $K = 5$

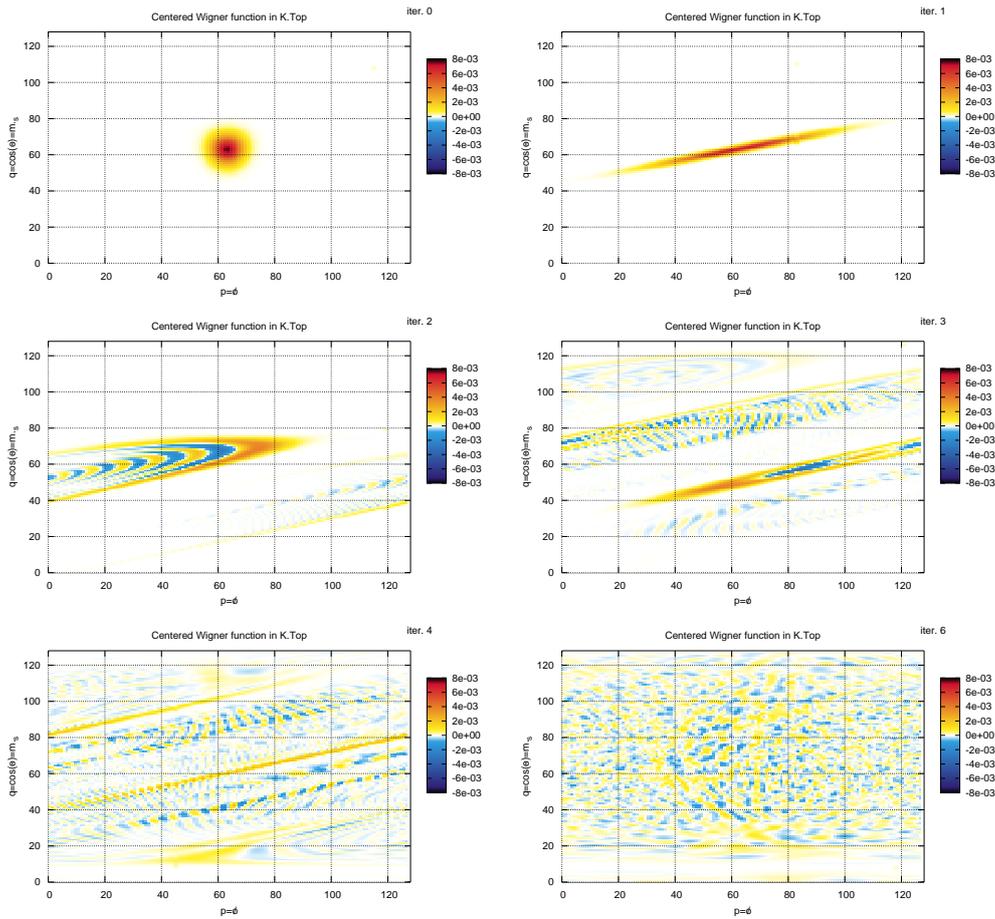


Figura 5.7: Evolución temporal del *Kicked Top* en el caso caótico $K = 5$ llevada al centro de distribuciones, dimensión del espacio de Hilbert 128. En este caso el centro de la distribución no es un punto bien definido por valores positivos, la desviación cuadrática media alrededor de cualquier otro punto es prácticamente la misma. Además la función de Wigner presenta pequeñas estructuras de valores positivos y negativos alternantes, por lo que un corrimiento pequeño provoca una decorrelación importante con el estado anterior. En este caso el corrimiento al centro de la distribución actúa más bien como una perturbación muy grande, decorrelacionando la evolución perturbada y no perturbada, haciendo decaer el Eco de Loschmidt aún más rápido.

sistema muy sensible. Una pequeña traslación del espacio de fases convierte el estado en otro ortogonal al inicial (un argumento similar al utilizado para explicar la importancia de las estructuras *sub-Planck* en [Zur01]). De este modo, la corrección a diferentes centros de cada distribución tiene el efecto de hacer las distribuciones con y sin perturbación incrementa su discrepancia en lugar de resultar más parecidas. Una explicación más gráfica se encuentra en la figura 5.8.

5.3.2. Kicked Rotator

Para el *Kicked Rotator* en el régimen caótico encontramos el Eco corregido tiene un comportamiento similar al observado para el *Kicked Top*. Sin embargo, para el caso regular, encontramos que la corrección solo funciona con seguridad a tiempos muy cortos. A tiempos mayores tiene un comportamiento errático. Los resultados están en las figuras 5.10 y 5.11.

El rápido decaimiento del eco corregido puede interpretarse recordando que en el *Kicked Rotator* la dinámica del paquete integrable lleva a la fragmentación en varios paquetes en forma de franjas. En este sentido se parece más al mapa del panadero que a un sistema Hamiltoniano. Así el *Kicked Rotator* no presenta una dinámica semiclásica clara. Esto lo aleja de las condiciones de validez de las ideas cualitativas sobre cómo debería comportarse una dinámica integrable. En el *Kicked Top*, en cambio, el paquete se mueve por el espacio de fases sin que se deforme significativamente, es decir que éste tiene un comportamiento semiclásico muy marcado. Por ello la corrección al Eco de Loschmidt disminuye el decaimiento durante los momentos iniciales, antes que el paquete se fragmente y aparezcan las franjas. En este régimen temporal el decaimiento se torna más parecido al caso caótico del *Kicked Top*.

Una primera conclusión es que la corrección propuesta funciona correctamente en regímenes integrables para tiempos muy cortos, en los que el paquete inicial no se ha deformado demasiado. Luego, dependiendo de la dinámica del sistema puede seguir disminuyendo el decaimiento o aumentarlo. En el caso caótico el resultado es que el decaimiento es mucho mayor, independientemente del modelo. Esta, en principio, es una propiedad no deseada ya que impediría identificar claramente el régimen Lyapunov.

La segunda y más importante conclusión, es que si tomamos el decaimiento del Eco de Loschmidt según la definición corregida a los centros de las distribuciones como una cuantificación de la estabilidad de un sistema, entonces los sistemas de dinámica integrable estudiados aquí siempre son más estables que los sistemas caóticos.

Efecto de perturbaciones en estados con estructuras muy pequeñas

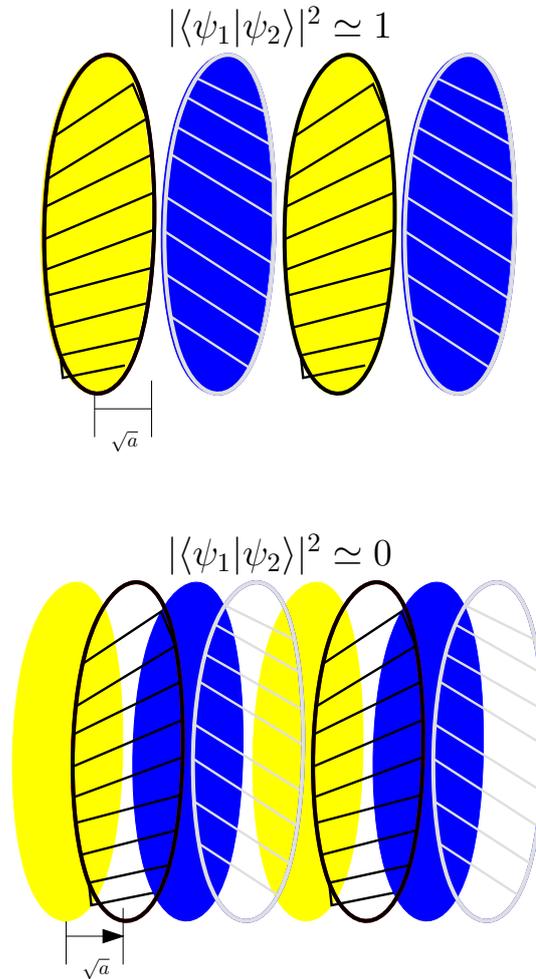
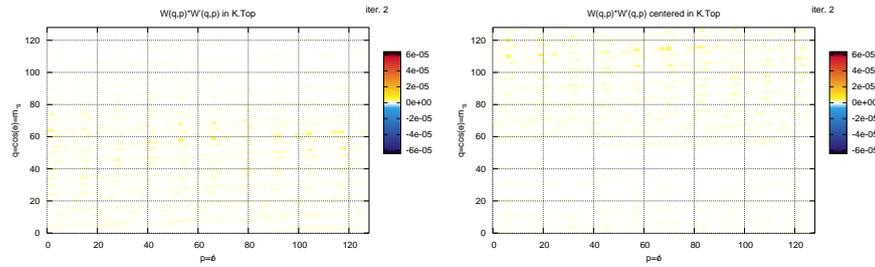


Figura 5.8: El producto escalar entre dos estados se puede calcular por la superposición de las funciones de Wigner. En amarillo y azul están representadas las regiones positivas y negativas del estado sin perturbación, mientras que en rayas negras y grises lo mismo para el estado con perturbación. Arriba la perturbación no ha actuado, por lo que ambos estados son iguales, al multiplicar áreas con el mismo signo el resultado es positivo, y al sumar obtenemos $\simeq 1$. Ahora si la perturbación produce un corrimiento comparable al tamaño de las estructuras (oscilaciones) de los estados, estos quedan desfasados. Se multiplicarán en igual medida áreas de igual y distinto signo, por lo que al sumar los productos se anularán entre sí y el resultado será $\simeq 0$. Por ello los estados con estructuras muy pequeñas (como los caóticos) son muy sensibles a perturbaciones.

Comparación de productos $W(q,p)W_{\Sigma}(q,p)$ con y sin corrección a los centros de las distribuciones en Kicked Top con $K = 20$



Comparación de productos $W(q,p)W_{\Sigma}(q,p)$ con y sin corrección a los centros de las distribuciones en Kicked Top con $K = 0,7$

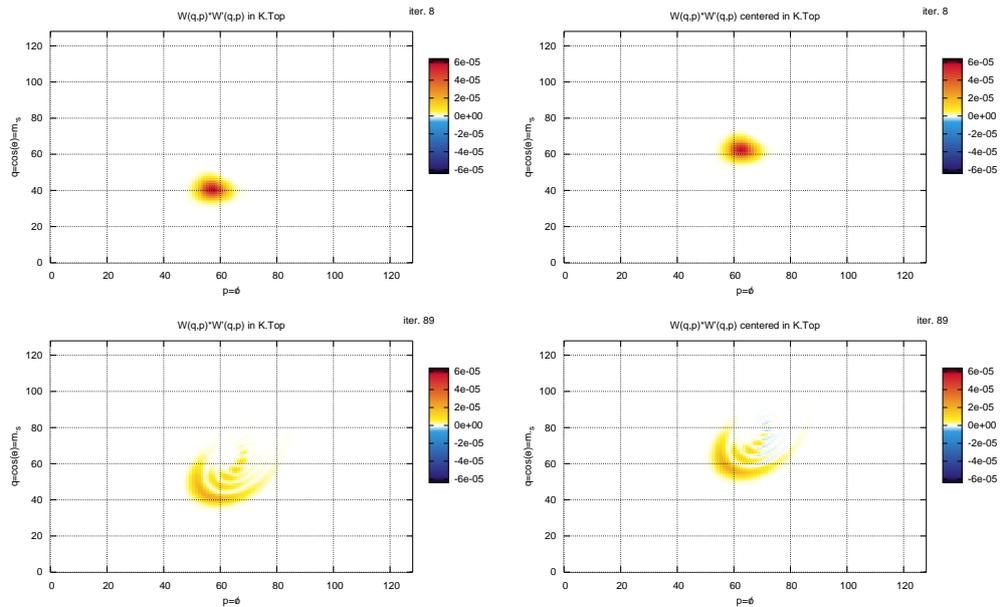


Figura 5.9: Productos de las funciones de Wigner con y sin corrección al centro de la distribución (columnas derecha e izquierda, respectivamente). En todos los casos la perturbación fue $\phi = 7 \times 10^{-4}$ y dimensión del espacio de Hilbert 128. Arriba se muestra un ejemplo caótico, donde el sistema ya ha saturado. En este el producto es casi nulo en ambos casos. Abajo se muestra un caso integrable. En los primeros instantes (línea del medio) la corrección es una mejora leve, mientras que a tiempos largos (última línea) el caso corregido muestra regiones negativas, mientras que el caso sin corregir no. Entonces el producto corregido dará un resultado menor.

Ecos de Loschmidt con corrección para el Kicked Rotator, dimensión 512, en un caso integrable.

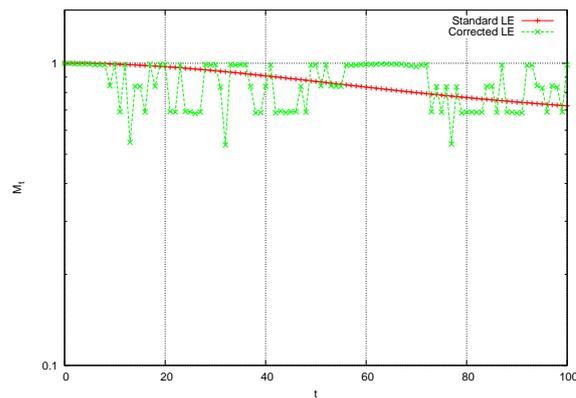
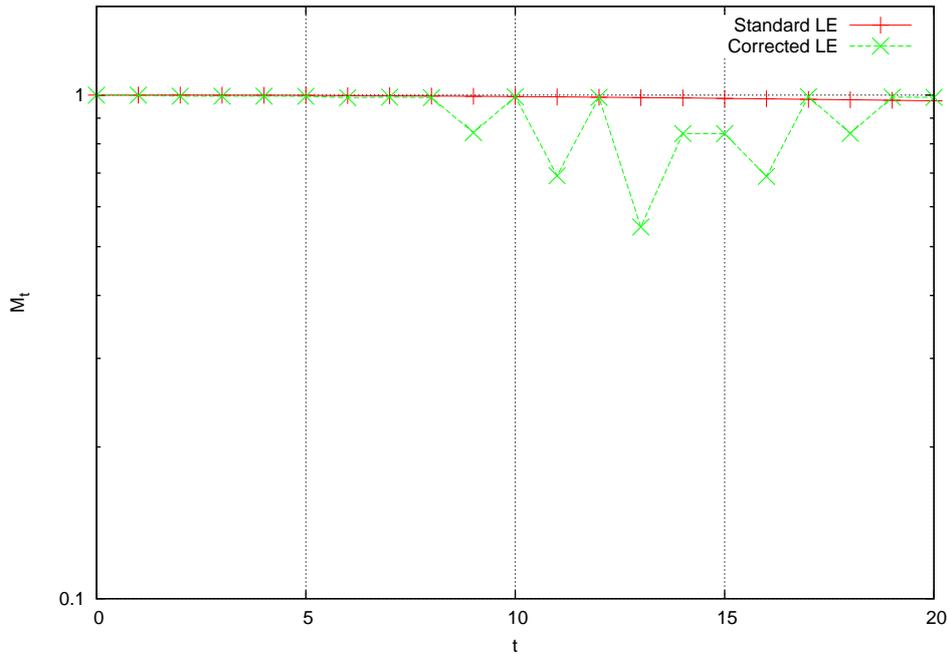


Figura 5.10: En la figura se muestra el caso $K = 0$ con perturbación $\phi = 4 \times 10^{-5}$. La corrección solo funciona correctamente a tiempos cortos, luego se comporta erráticamente hasta que se cumple un período y el paquete inicial se vuelve a formar (en $t = 64$, ver figura de la dinámica). La figura de abajo es una ampliación a tiempos largos.

Ecos de Loschmidt con corrección para el Kicked Rotator, dimensión 512, en un caso caótico.

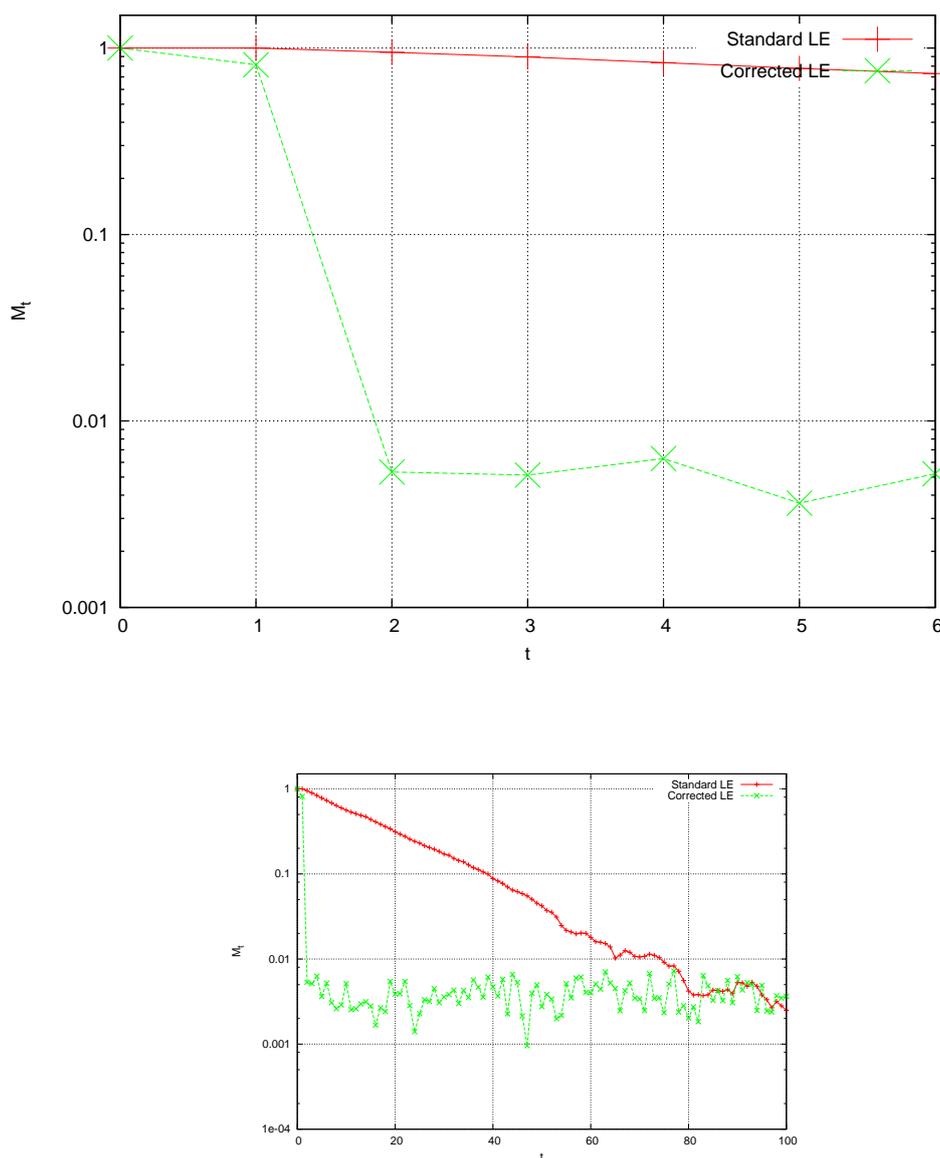


Figura 5.11: En la figura se muestra el caso $K = 20$ con perturbación $\phi = 6 \times 10^{-6}$. El comportamiento es similar al caso del *Kicked Top* caótico y la corrección satura rápidamente mientras que la versión estándar decae exponencialmente. Abajo se muestra una ampliación a tiempos largos.

Evolución en el espacio de fases llevada al centro de la distribución para el Kicked Rotator para el caso integrable $K = 0$

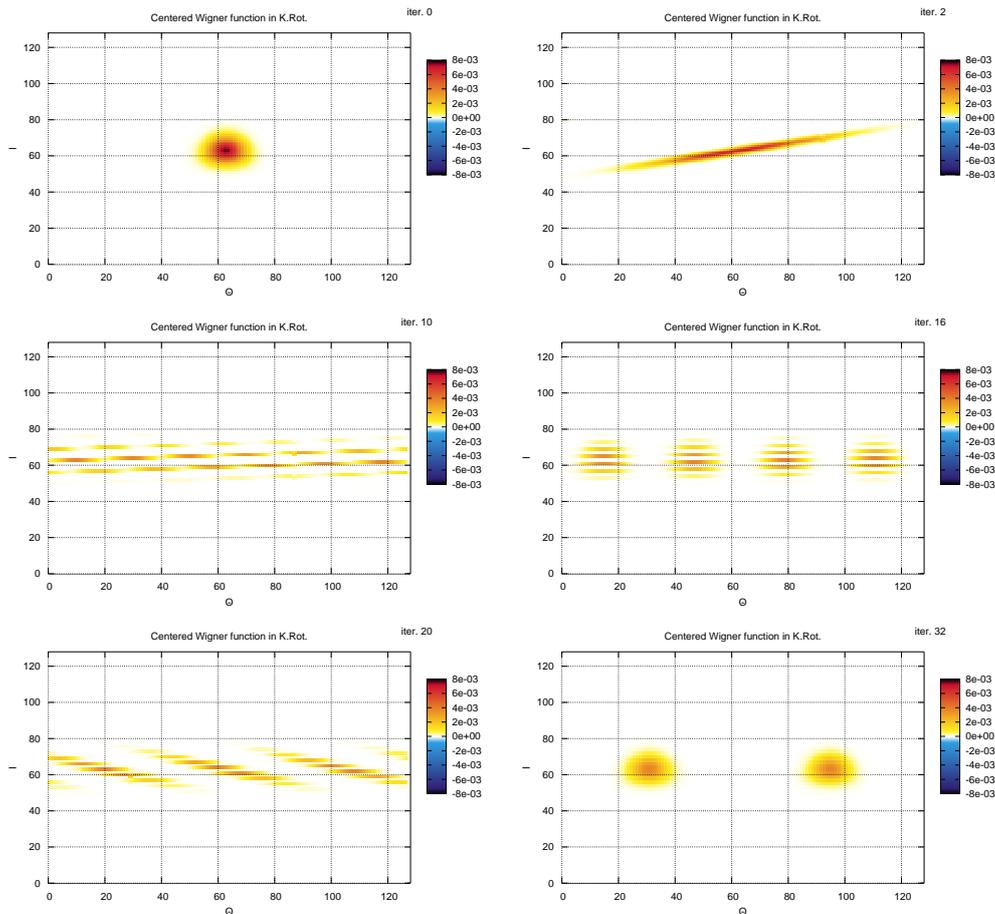


Figura 5.12: Evolución temporal del *Kicked Rotator* en el caso integrable $K = 0$, llevada al centro de la distribución en cada instante. Se debe comparar con 4.10. El cambio al centro de las distribuciones solo tiene el efecto esperado para tiempos cortos, cuando el paquete permanece sin dividirse. Cuando el paquete se divide y presenta franjas un corrimiento al centro de masa ya no ayuda a acercar las regiones de valores más positivos de los casos perturbado y no perturbado, sino que al desplazar las distribuciones las hace descorrelacionarse aún más.

Evolución en el espacio de fases llevada al centro de la distribución para el Kicked Rotator para el caso caótico $K = 20$

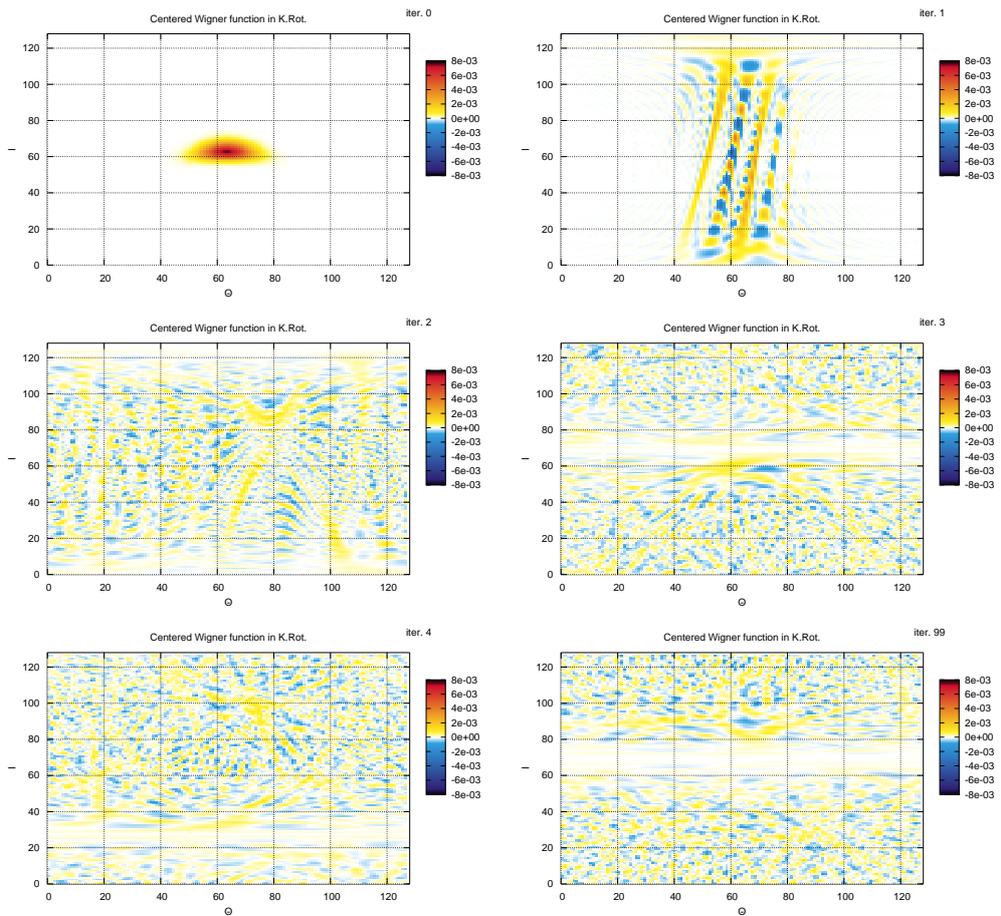


Figura 5.13: Evolución temporal del *Kicked Rotator* en el caso integrable $K = 0$, llevada al centro de la distribución, dimensión del espacio de Hilbert 128 (comparar con 4.13). Al igual que para el caso caótico del *Kicked Top*, el centro de la distribución no es un punto centrado en una región de valores positivos altos, sino que la desviación cuadrática media alrededor de cualquier punto es prácticamente la misma. Entonces un corrimiento al centro de la distribución actúa más bien como una perturbación muy grande, descorrelacionando la evolución perturbada y no perturbada.

Comparación de productos $W(q, p)W_{\Sigma}(q, p)$ con y sin corrección a los centros de las distribuciones en Kicked Rotator con $K = 0$

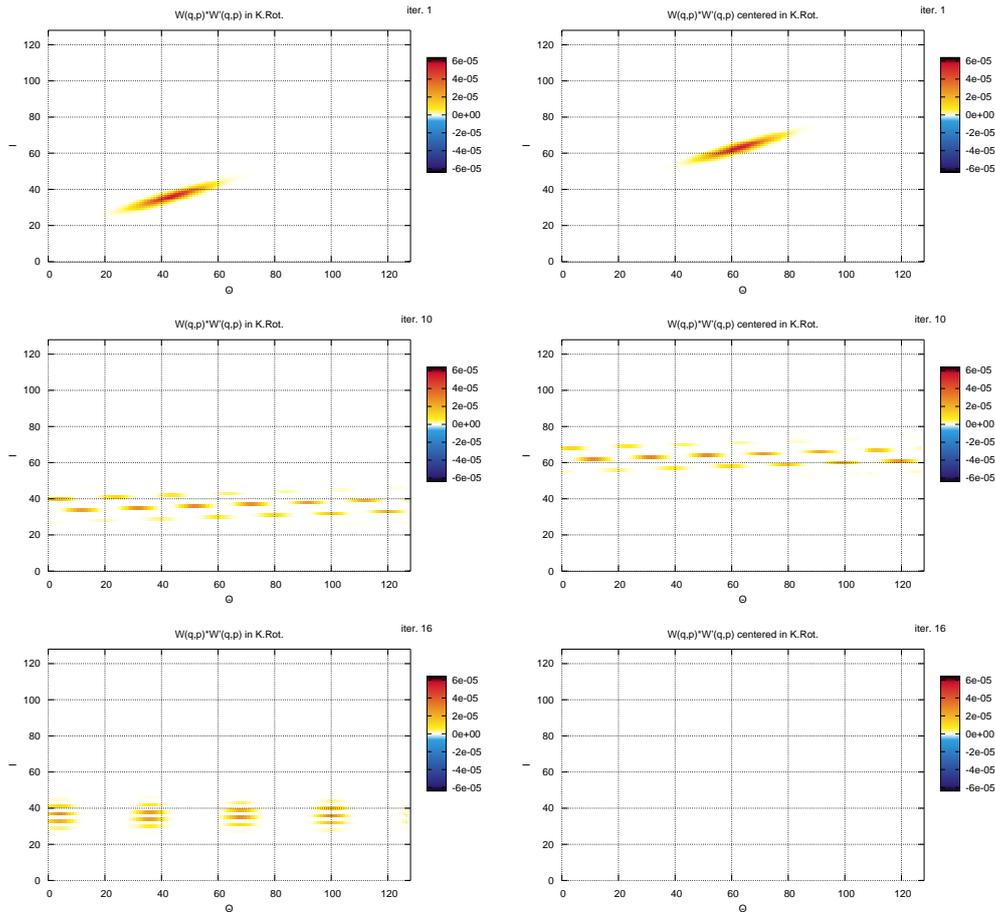


Figura 5.14: En la figura se muestran las funciones $W(q, p)W_{\Sigma}(q, p)$ para *Kicked Rotator* con $K = 0$, $\phi = 4 \times 10^{-5}$. En la columna de la derecha están los productos comparados desde los centros, mientras que a la izquierda se encuentran los productos de la manera usual. Estas multiplicaciones de los estados perturbado y no perturbado pueden ser los mismos en el caso con y sin corrección, mayores o incluso menores, como en el caso de la última línea. Como se mencionó antes, cuando el paquete solo se ha trasladado la corrección da el valor más alto, pero si el estado tiene franjas u oscilaciones por lo general resulta en un valor muy bajo.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios finales

En este capítulo se hace un pequeño resumen de los resultados y logros de este trabajo.

Este trabajo se ha basado en tres conceptos teóricos principales: la función de Wigner, los modelos de mapas y el Eco de Loschmidt. Estos ingredientes fueron necesarios para desarrollar la propuesta innovadora de este trabajo: la corrección al Eco de Loschmidt para sistemas integrables.

El primer logro importante ha sido una implementación numérica eficiente de la función de Wigner para sistemas discretos basada en la *FFT*, dada por la ecuación 2.23. Esta implementación tiene la ventaja de no necesitar ninguna corrección a las fases para obtener un resultado sin parte imaginaria y no presenta imágenes “fantasma” de la función de Wigner (como por ejemplo los obtienen en [MPS02]) ya que no requiere utilizar el espacio $2N \times 2N$ explícitamente.

El siguiente logro fue la implementación numérica de los modelos de mapas “*Kicked Top*” y “*Kicked Rotator*” suficientemente eficiente para permitir el estudio de su dinámica cuántica así como de su decoherencia a través del Eco de Loschmidt. Se estudiaron los comportamientos en regímenes integrables y caóticos, donde se analizó la dependencia del exponente de decaimiento con las magnitudes de la perturbación y el parámetro responsable del caos (K). En cuanto a la dinámica estudiada en el espacio de fases, se encontró que el *Kicked Top* tiene, en el caso integrable, el comportamiento semiclásico esperado, es decir que consiste en un paquete semiclásico que se trasladada alrededor del centro del espacio de fases sin sufrir grandes deformaciones. A medida que aumenta el caos en el sistema tiende a centrar la distribución en el centro del espacio. Por el contrario, el *Kicked Rotator* demostró un comportamiento mucho más errático y lejos de la imagen inicial de un sistema integrable, aún en ausencia de caos. Éste tiende a separar un paquete inicial semiclásico en varios fragmentos formando franjas, que luego de un período fijo se vuelven a juntar para armar el estado coherente inicial. En consecuencia, una perturbación sobre estos estados no tiene

un claro efecto de desplazamiento en el espacio de fases.

En el régimen caótico ambos mapas se comportaron de la misma manera, aumentando exponencialmente con el tiempo su cobertura del espacio de fases y formando estructuras hasta saturar al ocupar todo el espacio disponible. Esto concuerda con un decaimiento exponencial en sus Eco de Loschmidt. Para tiempos muy largos los estados de una iteración están totalmente descorrelacionados del estado de la siguiente iteración.

Estos modelos abren la posibilidad de estudiar problemas de computación cuántica, caos, reversión temporal y decoherencia. Son sistemas suficientemente simples y computacionalmente livianos, que incluso tendrían la posibilidad de llevarse a cabo experimentalmente con los recursos instrumentales de este grupo.

Por último, la parte más importante de este trabajo fue el estudio de una definición del Eco de Loschmidt corregida a los centros de las distribuciones (definición 5.1). Con esta propuesta se intenta demostrar que la definición estándar del Eco de Loschmidt como medida para la estabilidad ante perturbaciones falla en el caso de dinámica integrable, y que efectivamente éstos sistemas son más robustos que los sistemas caóticos.

En este sentido, los resultados obtenidos demuestran que, en los modelos estudiados, *el Eco de Loschmidt corregido a los centros de las distribuciones es siempre mayor en los casos integrables que en los caóticos*. Por lo tanto, si aceptamos la versión corregida como una magnitud correcta para medir estabilidad, *los sistemas de dinámica regular son, en todos los casos, menos sensibles ante perturbaciones que los sistemas con dinámica caótica*.

Al comparar los valores de los Ecos estándar y corregido, vemos que para tiempos cortos, cuando la fidelidad no ha decaído significativamente (zona relevante en un procesador cuántico), para una dinámica regular se obtiene un decaimiento más lento que en la definición de fidelidad tradicional. *En sistemas integrables con un claro comportamiento semiclásico y perturbaciones displacivas el decaimiento del Eco de Loschmidt Corregido es más lento que en el Eco de Loschmidt Estándar*, incluso a tiempos muy largos. El *Kicked Top* en el régimen integrable cumple con esta condición. Así, resulta que en el caso perfectamente integrable la corrección provee un eco perfecto (el eco corregido nunca decae). Por otro lado el *Kicked Rotator* con la perturbación que hemos estudiado (la cual no resultó ser netamente displaciva) es precisamente el caso contrario. Al comparar, para éste modelo, los valores de los ecos de Loschmidt en ambas definiciones vemos que, contrariamente a lo esperado en un principio, la “corrección” a tiempos largos tiende a decaer muy rápido. Esto es válido tanto en casos caóticos como en integrables. Las modificaciones de fases implícitas en una traslación arbitraria (en nuestro caso al centro de la distribución) son responsables de este efecto.

En cuanto a la corrección para el caso caótico, en ambos modelos ésta decae

muy velozmente hasta saturar en tiempos muy cortos como consecuencia de la descorrelación involucrada en el desplazamiento. En este caso las perturbaciones consideradas no son netamente displacivas y toda posible mejora es contrarrestada por las pequeñas estructuras en el espacio de fases. Sería interesante evaluar el régimen de decaimiento del Eco de Loschmidt en la versión corregida. Se debería estudiar si existe un régimen para el cual éste es exponencial y las condiciones para relacionar a este decaimiento con el exponente de Lyapunov clásico. Es muy posible que los desplazamientos sean una limitación importante para la validez de la teoría semiclásica en que se basa el régimen Lyapunov.

Con este trabajo se ha contribuido a un tema en que han habido interpretaciones equívocas y aún cuando la respuesta no es universal, presentamos claras indicaciones de que, muchas veces, hay información oculta no revelada por la fidelidad tradicional y que es susceptible de ser decodificada por un Eco de Loschmidt adecuadamente corregido.

Apéndice A

Propiedades de la Función de Wigner

A.1. Cálculo del valor medio En la función de Wigner Continua

Si se toma un operador cualquiera $\hat{C}(\hat{p}, \hat{q})$ se lo puede asociar con una función del espacio de fases $C(q, p)$ utilizando

$$\hat{C}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta q d\delta p c(\delta q, \delta p) e^{\frac{i}{\hbar}(\delta q \hat{p} + \delta p \hat{q})} \quad (\text{A.1})$$

$$C(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta q d\delta p c(\delta q, \delta p) e^{\frac{i}{\hbar}(\delta q p + \delta p q)} \quad (\text{A.2})$$

de modo que ambos quedan relacionados por

$$\hat{C}(\hat{p}, \hat{q}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta q d\delta p d\delta p d\delta q C(p, q) e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q(p-\hat{p}) + \delta p(q-\hat{q}))} \quad (\text{A.3})$$

y el valor de expectación de este operador será

$$\begin{aligned} \langle \hat{C} \rangle &= \langle \psi | \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta q d\delta p d\delta p d\delta q C(p, q) e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q(p-\hat{p}) + \delta p(q-\hat{q}))} | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp C(q, p) \underbrace{\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta q d\delta p e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q p + \delta p q)} \overbrace{\langle \psi | e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q \hat{p} + \delta p \hat{q})} | \psi \rangle}^{\bar{T}(\delta q, \delta p)}}_{W(q, p)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp C(q, p) W(q, p) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

El resultado es análogo a la manera de calcular el valor medio en mecánica clásica con la densidad en el espacio de fases $\rho(q, p)$.

A.2. Las propiedades que definen la Función de Wigner

Como se menciona en 2, la función de Wigner queda unívocamente determinada por las siguientes tres propiedades [BB87]

$$\text{Im}[W(q, p)] \equiv 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\rho(q) = |\psi(q)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp \text{ y las otras distrib. marginales} \quad (\text{A.6})$$

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{1(q,p)} W_{2(q,p)} dq dp \quad (\text{A.7})$$

La primera propiedad (ecuación A.5) indica que la función de Wigner es real pura, pero no restringe a valores positivos como una distribución clásica. Una demostración simple a partir de la definición 2.1 es

$$\begin{aligned} W(q, p)^* &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi\left(q - \frac{\Delta}{2}\right)^* \psi\left(q + \frac{\Delta}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta p} \right)^* d\delta q \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(q - \frac{\Delta}{2}\right) \psi\left(q + \frac{\Delta}{2}\right)^* e^{\frac{i}{\hbar}\Delta p} d\delta q \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(q - \frac{\Delta}{2}\right)^* \psi\left(q + \frac{\Delta}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta p} d(-\Delta) \\ &= -W(q, p) \\ \Rightarrow \text{Im}[W(q, p)] &= \frac{1}{2}(W(q, p) + W(q, p)^\dagger) = 0 \\ \Rightarrow \text{Re}[W(q, p)] &= \frac{1}{2}(W(q, p) + W(q, p)^\dagger) = W(q, p) \end{aligned}$$

La segunda propiedad (ecuación A.6) se debe a que integrar sobre cualquier línea en el espacio de fases $aq + bp = c$ se debe obtener la probabilidad de que al medir el observable $a\hat{q} + b\hat{p}$ se obtenga el valor c . Desde otro punto de vista, para una distribución conjunta $\rho(q, p)$ se deben obtener las distribuciones marginales correctas al sumar sobre alguna variable. La función de Wigner juega el papel de esta distribución y por lo tanto se debe obtener de ella la probabilidad que se obtendría en otras bases a partir de la función de onda.

La tercera propiedad nos será muy útil más adelante para calcular el Eco de Loschmidt, la explicación gráfica se encuentra en la figura 2.4. Una demostración

de esta propiedad se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} W_{1(q,p)} W_{2(q,p)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1(q-\frac{\delta q}{2})}^* \psi_{1(q+\frac{\delta q}{2})} \psi_{2(q-\frac{\delta q}{2})}^* \psi_{2(q+\frac{\delta q}{2})} e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q + \delta p)p} d\delta q d\delta p dq dp \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1(q-\frac{\delta q}{2})}^* \psi_{1(q+\frac{\delta q}{2})} \psi_{2(q-\frac{\delta q}{2})}^* \psi_{2(q+\frac{\delta q}{2})} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q + \delta p)p} dp \right)}_{\delta(\delta q + \delta p)} d\delta q d\delta p dq \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1(q-\frac{\delta q}{2})}^* \psi_{1(q+\frac{\delta q}{2})} \psi_{2(q+\frac{\delta q}{2})}^* \psi_{2(q-\frac{\delta q}{2})} d\delta q dq \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1(q_+)} \psi_{2(q_+)}^* dq_+ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1(q_-)}^* \psi_{2(q_-)} dq_- \\
 &= |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Discretización correcta de los Operadores Punto del espacio de fases

B.1. Operadores Punto del espacio de fases

Usando la matriz densidad $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, la definición 2.1 de $W(q, p)$ también se puede escribir como

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \delta q/2 | \hat{\rho} | q + \delta q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\delta q p} d\delta q \quad (\text{B.1})$$

Esta definición es válida para estados no puros y abre el paso para su utilización en resultados experimentales.

Más aún, es conveniente para la discretización que se realizará en la sección 2.2 escribir la función de Wigner como el valor de expectación de un operador (operador punto del espacio de fases)

$$W(q, p) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}(q, p)] \quad (\text{B.2})$$

Los operadores $\hat{A}(q, p)$ dependen de q, p y pueden escribirse en término de productos de δ simetrizadas

$$\begin{aligned} \hat{A}(q, p) &\equiv \delta(\hat{p} - p)\delta(\hat{q} - q) \\ &= \int \frac{d\delta q d\delta p}{(2\pi\hbar)^2} e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q(\hat{p}-p) - \delta p(\hat{q}-q))} \\ &= \int \frac{d\delta q d\delta p}{(2\pi\hbar)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\delta q p - \delta p q)} \hat{D}(\delta q, \delta p) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde se definió el operador traslación continua

$$\hat{D}(\delta q, \delta p) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(\delta q \hat{p} - \delta p \hat{q})} \quad (\text{B.4})$$

Este operador es útil para escribir otra definición, importante para la discretización [MPS02]:

$$\hat{A}(q, p) = \frac{1}{\pi \hbar} \hat{D}(q, p) \hat{R} \hat{D}(q, p)^\dagger \quad (\text{B.5})$$

donde \hat{R} es el operador paridad, $\hat{R}|q\rangle = |-q\rangle$.

B.1.1. Discretización de los operadores punto

Definimos ahora los operadores traslación en este espacio discreto: (las sumas son mod(N))

$$\hat{U}^m|q\rangle = |q+m\rangle, \quad \hat{U}^m|p\rangle = e^{i2\pi mp/N}|p\rangle \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{V}^m|p\rangle = |p+m\rangle, \quad \hat{V}^m|q\rangle = e^{i2\pi mq/N}|q\rangle \quad (\text{B.7})$$

De la misma manera que en el continuo

$$e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}p\hat{q}} = e^{-\frac{i}{\hbar}p\hat{q}}e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}e^{2\pi qp/N} \quad (\text{B.8})$$

(usando $e^{A+B} = e^{-[A,B]}e^Ae^B$ y $[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$), ahora se tiene

$$\hat{V}^p\hat{U}^q = \hat{U}^q\hat{V}^pe^{i2\pi qp/N} \quad (\text{B.9})$$

Con ello se puede generalizar

$$\hat{D}(q, p) = e^{-\frac{i}{\hbar}(q\hat{p} - p\hat{q})} = e^{-\frac{i}{\hbar}q\hat{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}p\hat{q}}e^{-\frac{i}{2\hbar}pq} \quad (\text{B.10})$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{D}(q, p) = \hat{U}^q\hat{V}^pe^{i\pi qp/N} \quad (\text{B.11})$$

A partir de lo anterior se obtiene la regla de composición siguiente:

$$\hat{D}(q_1, p_1)\hat{D}(q_2, p_2) = \hat{D}(q_1 + q_2, p_1 + p_2)e^{-i\pi(q_1p_2 - q_2p_1)/N} \quad (\text{B.12})$$

con lo que se deduce el siguiente caso, útil para obtener los valores debido a las condiciones de contorno periódicas:

$$\hat{D}^\dagger(q, p) = \hat{D}(2N - q, 2N - p) = \hat{D}(N - q, N - p)(-1)^{N+p+q} \quad (\text{B.13})$$

Con el objeto de discretizar correctamente la función de Wigner vamos a proceder a comenzar por los operadores punto, y luego llegar a la función de Wigner via la ecuación B.2.

La generalización de los operadores punto presenta varios inconvenientes, por lo que vale la pena presentar algunos ejemplos de como fallan los intentos que *a priori* parecen más simples.

Si se intenta generalizar la definición de la ecuación B.3 se obtiene $\hat{A}(q, p) = \frac{1}{N^2} \sum_{\delta q, \delta p=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi}{N}(\delta qp - \delta p q)} \hat{D}(\delta q, \delta p)$, lo cual define un operador no Hermitiano debido al operador traslación discreto. Al complejo conjugar \hat{A} y aplicar la ecuación B.13 se obtiene

$$\hat{A}^\dagger(q, p) = \frac{1}{N^2} \sum_{\delta q, \delta p=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi}{N}(\delta qp - \delta p q)} \hat{D}(\delta q, \delta p) (-1)^{N+p+q} \neq \hat{A}(q, p)$$

por lo que al aplicar la ecuación B.2 podríamos obtener una función de Wigner con parte imaginaria.

El procedimiento correcto para obtener \hat{A} en un espacio discreto (siguiendo [MPS02]) parte de la ecuación B.5, con la constante de Planck efectiva quedaría:

$$\hat{A}(q, p) = \frac{1}{N/2} \hat{D}(q, p) \hat{R} \hat{D}(q, p)^\dagger \quad (\text{B.14})$$

En este caso se define un operador Hermitiano pero hay otro problema; al cumplir $\hat{D}(q, p)$ la ecuación B.13, que relaciona $\hat{D}(p, q)$ con $\hat{D}(p + N, q + N)$, tenemos que los operadores obtenidos no son todos independientes, solo la mitad de ellos.

$$\begin{aligned} \hat{A}(q, p) &= \frac{1}{N} \hat{U}^q \hat{V}^p e^{i\pi qp/N} \hat{R} \left(\hat{U}^q \hat{V}^p e^{i\pi qp/N} \right)^\dagger \\ &= \frac{1}{N} \hat{U}^q \hat{V}^p \hat{R} \hat{V}^{-p} \hat{U}^{-q} \\ &= \frac{1}{N} \hat{U}^q \hat{U}^q e^{i2\pi qp/N} \hat{R} \hat{V}^{-p} \hat{V}^{-p} e^{i2\pi qp/N} \\ &= \frac{1}{N} \hat{U}^{2q} \hat{R} \hat{V}^{-2p} e^{i4\pi qp/N} \\ &= \frac{1}{N} \hat{U}^{2q} \underbrace{\hat{U}^N}_{=1} \hat{R} \hat{V}^{-2p} e^{i4\pi qp/N} \underbrace{e^{i2\pi p}}_{=1} \\ &= \frac{1}{N} \hat{U}^{2(q+N/2)} \hat{R} \hat{V}^{-2p} e^{i4\pi(q+N/2)p/N} \\ &= \hat{A}(q + N/2, p) \end{aligned}$$

Lo mismo se puede hacer para obtener la misma periodicidad en p . Es decir que se obtienen $(N/2)^2$ operadores independientes y se desean N^2 , que es el tamaño del espacio de fases discreto.

Entonces la solución más simple al problema es duplicar el tamaño del espacio de Hilbert $N \rightarrow 2N$. Con esto solo los primeros $N \times N$ elementos serán independientes. Entonces la definición correcta sería:

$$\hat{A}(q, p) = \frac{1}{2N} \hat{U}^q \hat{R} \hat{V}^p e^{i\pi pq/N} \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{1}{(2N)^2} \sum_{\delta q, \delta p=0}^{2N-1} e^{\frac{i2\pi}{2N}(\delta q p - \delta p q)} \hat{D}(\delta q, \delta p) \quad (\text{B.16})$$

Y los elementos no independientes se encuentran por la relación

$$\hat{A}(q + \Delta_q N, p + \Delta_p N) = \hat{A}(q, p) (-1)^{\Delta_q p + \Delta_p q + \Delta_q \Delta_p N} \quad (\text{B.17})$$

con $\Delta_q, \Delta_p = \{0, 1\}$.

Aplicando la ecuación la ecuación B.16 se llega a la relación:

$$\hat{A}(q, p) \hat{A}(q', p') = \frac{\hat{D}(q - q', p - p')}{4N^2} e^{i\frac{\pi}{N}(qp - q'p')} \quad (\text{B.18})$$

de donde se obtiene:

$$\text{Tr} \left[\hat{A}(q, p) \hat{A}(q', p') \right]_{N \times N} = \frac{1}{4N} \delta(q - q') \delta(p - p') \quad (\text{B.19})$$

donde se utilizó $\sum_n e^{inm} = \delta_m$.

Apéndice C

Regímenes de decaimiento del Eco de Loschmidt en el caso caótico

C.1. Regla de Oro de Fermi (FGR)

La conjetura de Bohigas [BGS84] propone que un Hamiltoniano con un equivalente clásico que presenta caos dinámico tiene las mismas propiedades espectrales que matrices Hermitianas aleatorias con una cierta distribución en sus componentes. Por ello los elementos de matriz $\Sigma_{n,n'} = \langle n|\Sigma|n'\rangle$, donde $|n\rangle$ son autoestados de \mathcal{H}_0 , tienen una distribución Gaussiana, independiente de como sea Σ . Si uno promedia el eco obtiene

$$\langle M(t) \rangle = |\langle \psi_0 | \langle e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} | \psi_0 \rangle|^2 \quad (\text{C.1})$$

Para promediar el propagador $e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} = U(t)$ conviene introducir el operador *Función de Green*

$$G(E) = \frac{1}{E + i\eta - \mathcal{H}} \quad \text{con } \eta \rightarrow 0^+ \quad (\text{C.2})$$

Como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sigma$, uno puede expandir G en potencias de Σ y al promediar sobre productos de matrices cuyos elementos tienen distribución Gaussiana se obtiene

$$\bar{G} = G_0 \frac{1}{1 - \langle \Sigma G_0 \Sigma \rangle G_0} \quad \text{con } G_0 = G_{\Sigma=0} = \frac{1}{E + i\eta - \mathcal{H}_0} \quad (\text{C.3})$$

La misma expansión de \bar{G} hace que su representación matricial sea diagonal

$$\bar{G}_{n,n'} = G_0 \frac{\delta_{n,n'}}{E + i - E_n - \gamma_n(E)} \quad (\text{C.4})$$

donde

$$\gamma_n(E) = \sum_{n'} \langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle G_{0n'} = \Delta_n(E) - i\Gamma_n(E)/2 \quad (\text{C.5})$$

$$\Delta_n(E) = \mathcal{P} \left[\sum_{n'} \frac{\langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle}{E - E_{n'}} \right] \quad (\text{C.6})$$

(en la ecuación C.6 la \mathcal{P} significa el valor principal).

$$\Gamma_n(E) = 2\pi \sum_{n'} \langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle \delta(E - E_{n'}) \quad (\text{C.7})$$

$$\approx 2\pi \langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle / \Delta \quad (\text{C.8})$$

Ya que los valores $\langle \Sigma_{n,n'}^2 \rangle$ varían muy poco con los índices se reemplazo reemplazar por un promedio, en donde Δ es la separación promedio de niveles de energía de \mathcal{H}_0 . Por otro lado la parte real de Δ_n es despreciable en comparación con las autoenergías E_n , al menos para tiempo no demasiado cortos. Con todo esto los elementos de matriz del propagador promediadas pasan a ser

$$\bar{U}_{n,n'}(t) = \delta_{n,n'} e^{-i\frac{E_n t}{\hbar} - \frac{\Gamma t}{2\hbar}} \quad (\text{C.9})$$

de modo que el Eco de Loschmidt pasa a ser

$$\begin{aligned} M(t) &= \left| \langle \psi_0 | U_\Sigma(t)^\dagger U(t) | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle \psi_0 | e^{-\Gamma t / (2\hbar)} | \psi_0 \rangle \right|^2 = e^{-\Gamma t / \hbar} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Este decaimiento exponencial con el exponente Γ/\hbar es el llamado régimen *FGR* por la similitud con la regla de oro de Fermi obtenida de la teoría de perturbaciones.

C.2. Régimen Lyapunov

C.2.1. Evolución temporal de la función de onda

Consideremos un Hamiltoniano genérico \mathcal{H}_0 y uno ligeramente perturbado $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Sigma$. Asimismo consideremos un estado inicial Gaussiano de ancho σ , centrado en la posición \mathbf{r}_0 y con momento \mathbf{p}_0 .

$$\psi(\bar{r}, t = 0) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^{d/4} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2} \quad (\text{C.11})$$

Esto facilitará las cuentas, si bien sería más correcto hacerlas con paquetes coherentes (semiclásicos), los cuales son muy parecidos, al menos en la representación posición. Con estos paquetes semiclásicos se asegura una correspondencia con el límite clásico. El comportamiento para otros estados iniciales como autoestados en p o q , o estados aleatorios presentan un comportamiento diferente [WC02].

Siguiendo la receta semiclásica [JP01] vamos a representar la evolución de la función de onda según

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | e^{-i\mathbf{H}t/\hbar} | \psi_0 \rangle \quad (\text{C.12})$$

$$= \int d\bar{\mathbf{r}} \langle \mathbf{r} | e^{-i\mathbf{H}t/\hbar} | \bar{\mathbf{r}} \rangle \langle \bar{\mathbf{r}} | \psi_0 \rangle \quad (\text{C.13})$$

$$= \int d\bar{\mathbf{r}} K(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) \psi(\bar{\mathbf{r}}, 0) \quad (\text{C.14})$$

donde $K(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$ es el propagador de $\bar{\mathbf{r}}$ a \mathbf{r} en un tiempo t . El propagador sobre todos los caminos cuánticos será aproximado por la suma sobre todas las trayectorias clásicas $s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$, de modo que queda

$$K(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) \approx \sum_{s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)} K_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) \quad (\text{C.15})$$

donde los propagadores sobre las trayectorias clásicas están dados por

$$K_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{d/2} C_s^{1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) - i \frac{\pi}{2} \mu_s \right] \quad (\text{C.16})$$

con $\mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$ es la acción clásica sobre la trayectoria y μ_s es un índice que cuenta el número de puntos conjugados en la trayectoria (índice de Maslov), que agrega una fase irrelevante en el cálculo del Eco de Loschmidt. C_s es el jacobiano, necesario para la conservación de las probabilidades, $C_s = + \det \left| - \frac{\partial^2 \mathcal{S}_s}{\partial \mathbf{r}_i \partial \bar{\mathbf{r}}_j} \right|$. El rango de validez de esta aproximación es para valores altos de energía.

Como una aproximación más tomamos la acción a primer orden en la trayectoria ($\mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \simeq \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) + \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)|_{\bar{\mathbf{r}}=\mathbf{r}_0} \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)$), lo cual es equivalente a tomar longitudes del paquete inicial mucho mayores a la longitud de onda de de Broglie, $\sigma \gg \lambda_{deBroglie}$:

$$\mathcal{S}_s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t) = \mathcal{S}_{s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) + \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \mathcal{S}_s|_{\bar{\mathbf{r}}=\mathbf{r}_0} \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) + \dots \quad (\text{C.17})$$

$$\approx \mathcal{S}_{s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) - \bar{\mathbf{p}}_s \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) \quad (\text{C.18})$$

donde $s'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)$ son trayectorias de \mathbf{r}_0 a \mathbf{r} en tiempo t , es decir que son ligeramente diferentes a las trayectorias originales $s(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}; t)$. Finalmente aplicamos C.18 en C.16, ignoramos μ_s , y se reemplaza en C.14. Así se llega a

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}) \approx \sum_{s'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)} K_{s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \int d\bar{\mathbf{r}} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{\mathbf{p}}'_s \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)} \psi(\bar{\mathbf{r}}, 0) \quad (\text{C.19})$$

y al aplicar la definición del estado inicial C.11 (aquí por que esta elección facilita las cuentas) se obtiene

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}) = (4\pi\sigma^2)^{d/4} \sum_{s'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)} K_{s'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t) \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 \right] \quad (\text{C.20})$$

Esta última ecuación le da importancia solo a los términos de trayectorias para los cuales se difiere poco (menos que \hbar/σ) del momento $\bar{\mathbf{p}}_0$.

C.2.2. Cálculo del Eco de Loschmidt

Al tener la función de onda a un tiempo t para un Hamiltoniano genérico se puede calcular el Eco de Loschmidt según la definición 3.1, en particular según la ecuación 3.3.

$$\begin{aligned} \langle \psi_\Sigma(t) | \psi(t) \rangle = & \left(\frac{\sigma^2}{\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \int d\mathbf{r} \sum_{s, \tilde{s}} \sqrt{C_{\tilde{s}}} \sqrt{C_s} \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathcal{S}_s - \mathcal{S}_{\tilde{s}}) - \frac{i}{\hbar} \pi (\mu_s - \mu_{\tilde{s}}) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2} ((\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 + (\bar{\mathbf{p}}_{\tilde{s}} - \mathbf{p}_0)^2) \right] \quad (\text{C.21}) \end{aligned}$$

Como al principio de la sección, los tildes significan que la evolución es perturbada. Si $s = \tilde{s}$ ($\Sigma = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_0$) el resultado es 1.

A esta altura se realiza otra aproximación, nuevamente en la misma dirección. Suponiendo que las trayectorias no cambian apreciablemente debido a una perturbación Σ muy pequeña, al menos en el intervalo de tiempo de interés, tendríamos solo las sumas sobre $\tilde{s} \approx s$ (*aproximación de perturbación clásicamente débil*).

Entonces se puede decir $\mu_s \approx \mu_{\tilde{s}}$ y $\mathcal{S}_s - \mathcal{S}_{\tilde{s}} = \Delta\mathcal{S}_s$ se puede calcular clásicamente. Con esto, C.21 se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi_\Sigma(t) | \psi(t) \rangle = & \left(\frac{\sigma^2}{\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \int d\mathbf{r} \sum_s C_s \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta\mathcal{S}_s \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 \right] \quad (\text{C.22}) \end{aligned}$$

y elevando esto al cuadrado se obtiene

$$M(t) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi\hbar^2} \right)^d \int d\mathbf{r} \sum_s C_s \int d\mathbf{r}' \sum_{s'} C_{s'} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta \mathcal{S}_s - \frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2 \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \Delta \mathcal{S}_{s'} - \frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{\mathbf{p}}_{s'} - \mathbf{p}_0)^2 \right] \quad (\text{C.23}) \end{aligned}$$

Es conveniente separar esta expresión en las contribuciones de los términos “diagonales” y “no diagonales”, esta definición es en términos de las trayectorias s y s' . Si s es muy cercano a s' sería un término $M_{s,s}$ diagonal, y el resto $M_{s,s' \neq s}$ serían no diagonales. Esta separación se debe a que cada uno es responsable de un régimen de decaimiento diferente (Regla de Oro de Fermi y Lyapunov, respectivamente). El decaimiento por *FGR* puede obtenerse por como en la sección C.1, por teoría de matrices aleatorias (*RMT*), o bien por este camino. A continuación me dedico al caso de régimen Lyapunov.

Siguiendo con [JP01], trataremos trayectorias s y s' muy cercanas, por lo que se puede aproximar la perturbación como

$$\Sigma(\mathbf{q}, t) = \Sigma(\mathbf{q}_0, t_0) + \nabla \Sigma(\mathbf{q}_0, t_0) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \Big|_{(\mathbf{q}_0, t_0)} (t - t_0) \quad (\text{C.24})$$

entonces se puede aproximar

$$\Delta \mathcal{S}_s - \Delta \mathcal{S}_{s'} \approx \int_0^t \nabla \Sigma(\mathbf{q}_s(t')) \cdot (\mathbf{q}_s(t') - \mathbf{q}_{s'}(t')) dt' \quad (\text{C.25})$$

Donde la diferencia $\mathbf{q}_s(t') - \mathbf{q}_{s'}(t')$ es muy pequeña y puede aproximarse como

$$\mathbf{q}_s(t') - \mathbf{q}_{s'}(t') = B^{-1}(t')(\bar{\mathbf{p}}_s - \bar{\mathbf{p}}_{s'}) = B^{-1}(t')B(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{C.26})$$

con la matriz $B_{ij} = -\frac{\partial^2 \mathcal{S}_s}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j}$. En el caso de comportamiento caótico $B^{-1}(t')$ está dominada por su mayor autovalor $e^{\lambda t'}$, con lo que

$$B^{-1}(t')B(t) \approx e^{\lambda(t'-t)} I \quad (\text{C.27})$$

donde λ es el exponente de Lyapunov.

Ahora la ecuación C.23 se puede promediar sobre las trayectorias de este tipo, teniendo efecto este promedio solo sobre la exponencial. Si se asume nuevamente que las fluctuaciones de diferencia de fase de la ecuación C.25 son Gaussianas se obtiene

$$\langle e^{\frac{i}{\hbar} (\Delta \mathcal{S}_{s(t)} - \Delta \mathcal{S}_{s'(t)})} \rangle = \exp \left[-\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^t dt dt' C_{\nabla(|\mathbf{q}_t - \mathbf{q}'_{t'}|, t-t')} (\mathbf{q}_t - \mathbf{q}'_{t'})^2 \right] \quad (\text{C.28})$$

donde se ha definido como la función correlación de fuerzas (nombre debido a la relación $\nabla V = -F$):

$$C_{\nabla(|\mathbf{q}_t - \mathbf{q}'_{t'}, t - t'}) = \langle \nabla \Sigma(\mathbf{q}_t, t) \cdot \nabla \Sigma(\mathbf{q}'_{t'}, t') \rangle \quad (\text{C.29})$$

Restringiéndose al caso [Cuc04]

$$C_{\nabla(|\mathbf{q}_t - \mathbf{q}'_{t'}, t - t')} = (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}'}) \langle \Sigma(\mathbf{q}_t, t) \Sigma(\mathbf{q}'_{t'}, t') \rangle \quad (\text{C.30})$$

Teniendo en cuenta ahora las funciones de correlación espacial y temporal C_S y C_T se puede escribir

$$\begin{aligned} C_{\nabla(|\mathbf{q}_t - \mathbf{q}'_{t'}, t - t')} &= (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}'}) \langle \Sigma^2 \rangle C_{T(t-t')} C_{S(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)} \\ &= \langle \Sigma^2 \rangle C_{T(t-t')} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}'}) C_{S(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)} \\ &= \langle \Sigma^2 \rangle C_{T(t-t')} (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}'}) \left(\frac{1-d}{q} \frac{\partial C_S(q)}{\partial q} - \frac{\partial^2 C_S(q)}{\partial q^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Si esto decae suficientemente rápido, se puede llegar a la expresión

$$\langle e^{\frac{i}{\hbar}(\Delta S_{s(t)} - \Delta S_{s'(t)})} \rangle = e^{-A(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 / \hbar^2} \quad (\text{C.32})$$

donde

$$A = \langle \Sigma^2 \rangle \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} dt' d\tau C_{T(\tau)} e^{2\lambda(t'-t)} \left(\frac{1-d}{\tau} \frac{\partial C_S(v\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 C_S(v\tau)}{\partial \tau^2} \right) \quad (\text{C.33})$$

A distintos regímenes domina C_S o C_T , y la anterior ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \langle \Sigma^2 \rangle \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} dt' d\tau C_{T(\tau)} e^{2\lambda(t'-t)} \left(\frac{1-d}{\tau} \frac{\partial C_S(v\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 C_S(v\tau)}{\partial \tau^2} \right) && \text{si domina } C_S \\ A &\rightarrow \langle \Sigma^2 \rangle \tau_0 \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda} && \text{si domina } C_T \end{aligned}$$

Usando los anteriores resultados en C.32 y C.23 se llega a

$$\begin{aligned} M(t) &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_s C_s^2 e^{-\frac{2\sigma^2}{\hbar}(\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2} e^{-A \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2\hbar^2}} \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int d\mathbf{r} \sum_s C_s^2 e^{-\frac{2\sigma^2}{\hbar}(\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{A} \right)^{d/2} \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

donde se en la última ecuación se integró en $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Luego si se cambia la variable de integración \mathbf{r} a $\bar{\mathbf{p}}$ el término C_s^2 pasa a ser C_s , el cual sabemos se comporta como $e^{-\lambda t}$ (ley difusiva) para tiempos largos y como $(m/t)^d$ (ley balística) para tiempos cortos, debido a que el Jacobiano es más que nada una derivada segunda de S con respecto a la posición.

Entonces interpolando esta ecuación entre los dos límites mencionados obtenemos

$$M(t) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \int d\bar{\mathbf{p}} \left(\frac{m}{t} \right)^d C_s e^{-\frac{2\sigma^2}{\hbar}(\bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{p}_0)^2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{A} \right)^{d/2} e^{-\lambda t} = \bar{A} e^{-\lambda t} \quad (\text{C.35})$$

y al integrar resulta $\bar{A} = \left(\frac{\sigma m}{\sqrt{At}} \right)^d$. Lo concerniente a Σ queda dentro de \bar{A} , por lo que la dependencia temporal en este régimen de pequeñas perturbaciones se debe principalmente al exponente λ .

APÉNDICE C. REGÍMENES DE DECAIMIENTO DEL ECO DE LOSCHMIDT EN EL CASO CAÓTICO

Apéndice D

Programas principales: FORTRAN

D.1. Kicked Top

```
!  
!  
!  
!  
program loschner  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
!~ IMPLICIT DOUBLE complex (C,Z)  
!~ IMPLICIT integer (I-N)  
parameter (DIMEN=512)  
PARAMETER (NAVG=5)  
PARAMETER (MIT=100)  
PARAMETER (LWORK=70*DIMEN)  
parameter (PI=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105  
*820974944592307816406286208998628034825342117067982148)  
integer n,maxit,maxtime,interv,INFO,mt(MIT),iseed,isavg,npert,mtodo  
double precision ddk,alpha,dpi,theta,phi,sj,rmlos,rmlosc,eta  
double precision dsx(DIMEN,DIMEN),dsz(DIMEN)  
double precision avlos(MIT+1,3),amlos(MIT+1,3,NAVG+1)  
  
double precision RWORK(2*DIMEN)  
double complex WORK(LWORK)  
  
double complex dsy(DIMEN,DIMEN),evo(DIMEN),zmls  
double complex cohsz(DIMEN),chtop(DIMEN),chtopR(DIMEN)  
double complex psi(DIMEN),psiR(DIMEN),wig1(DIMEN,DIMEN),wig2(DIMEN,  
*DIMEN),aux1(DIMEN,DIMEN),aux2(DIMEN,DIMEN)  
double complex uktop(DIMEN,DIMEN),uktopR(DIMEN,DIMEN),vtop(DIMEN,DI  
*MEN),vtopR(DIMEN,DIMEN),phtop(DIMEN),phtopR(DIMEN)  
  
! n=DIMEN==2*sj+1, donde sj es la magnitud del spin s^2, sm es la proyeccion del spin en z  
n=DIMEN  
sj=dble(n-1)/2d0  
! interv= cada cuantas iteraciones tomo datos en las animaciones, isavg= de cual avg hago la animación, mtodo=0 solo imprime el promedio, 1 imprime LE para todos,  
!~ interv=4  
interv=1  
isavg=0  
!~ isavg=3  
mtodo=1  
npert=3  
! El tiempo de la animación  
maxtime=1.1e6  
  
maxit=MIT  
if(dble(maxtime)/dble(maxit).le.0) then  
print *, "log0"  
end if  
! La fuerza de la patada en Sz^2 (~1.1)  
ddk=0 !Chaos parameter  
! La fuerza de la patada perturbada (~1e-5)  
alpha=5d-3 !Perturbation Parameter  
! La magnitud de la evolución sin patadas  
dpi=PI*0.5d0
```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```

!~ dpi2=1d-1
!~ dpi2=0

do iter=1,maxit+1
do m=1,3
avlos(iter,m)=0d0
do javg=1,NAVG+1
amlos(iter,m,javg)=0d0
end do
end do
end do

do iter=1,maxit
!this is to plot each iteration
mt(iter)=iter
!this is to make a linear plot in time
!~ mt(iter)=int((dble(iter)/dble(maxit))*dble(maxtime))
!this is to make a logarithmic plot in time
! mt(iter)=int(dexp(dble(iter)/dble(maxit)*dlog(dble(maxtime))))+
!      *iter-1
end do

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Parte 1: armo las matrices de evolución
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Armo las matrices que diagonalizan el spin
!~ call diagjspin(dsx,dsy,dsz)
!~ call diagspinmat(dsx,dsy,dsz)
call diagspinnumeric(dsx,dsy,dsz)

! Armo la evolución de la diagonal
!~ do k=1,n
!~ evo(k)=zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*ddk/(2d0*sj)*dsz(k)**2)
!~ end do

do i=1,n
do j=1,n
uktop(i,j)=dcmplx(0d0,0d0)
uktopR(i,j)=dcmplx(0d0,0d0)
aux1(i,j)=dcmplx(0d0,0d0)
end do
end do

! Hago uktop la evolución bajo el Hamiltoniano  $H=\pi/(2\tau)*S_x+ddk/(2s_j)*S_z^2*\delta(t-m*\tau)$  en un tiempo tau
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
uktop(i,j)=uktop(i,j)+
*dsx(i,k)*dsx(j,k)*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(dpi2)*dsz(k))*
*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*ddk/(2d0*sj)*dsz(i)**2)
!~ vtop(i,j)=uktop(i,j)
end do
end do
end do

! Hago vtop la evolución perturbada con  $H'=H+\alpha*S_x*\delta(t-m*\tau+e)$ 

if (npert.eq.0) then
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
! Perturbación en sx (no conserva centro de masa)
uktopR(i,j)=uktopR(i,j)+
*dsx(i,k)*dsx(j,k)*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(dpi2+alpha)*dsz(k))*
*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(ddk)/(2d0*sj)*dsz(i)**2)
end do
end do
end do
end if

if (npert.eq.1) then
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
! Perturbación en Sz**2 (conserva centro de masa)
uktopR(i,j)=uktopR(i,j)+
*dsx(i,k)*dsx(j,k)*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(dpi2)*dsz(k))*
*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(ddk+alpha)/(2d0*sj)*dsz(i)**2)
end do
end do
end do

```

D.1. KICKED TOP

```

end if

if (npert.eq.2) then
! Perturbación en Sy (no conserva el CM) la de Jacquod
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
aux1(i,j)=aux1(i,j)+
*dsy(i,k)*dconjg(dsy(j,k))*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(alpha)*dsz(k))
end do
end do
end do
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
uktopR(i,j)=uktopR(i,j)+aux1(i,k)*uktop(k,j)
end do
end do
end do
end do

if (npert.eq.3) then
! Perturbación en Sy (no conserva el CM) la de Jacquod
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
aux1(i,j)=aux1(i,j)+
*dsx(i,k)*dsx(j,k)*zexp(-dcmplx(0d0,1d0)*(alpha)*dsz(k))
end do
end do
end do
do i=1,n
do j=1,n
do k=1,n
uktopR(i,j)=uktopR(i,j)+aux1(i,k)*uktop(k,j)
end do
end do
end do
end do

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Parte 2: Diagonalizo la evolución
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! evo lo uso para basura, phtop es la diagonal, vtop es la matriz de cambio de base
call zgeev('N','V',n,uktop,n,phtop,evo,1,vtop,n,WORK,LWORK,RWORK,IN
*FO)
call zgeev('N','V',n,uktopR,n,phtopR,evo,1,vtopR,n,WORK,LWORK,RWORK
*,INFO)

! Si los autovalores no son de modulo 1 se va todo al carajo...
do k=1,n
phtop(k)=phtop(k)/dsqrt(dble(phtop(k))**2+dimag(phtop(k))**2)
phtopR(k)=phtopR(k)/dsqrt(dble(phtopR(k))**2+dimag(phtopR(k))**
*2)
end do

! Vtop/R es la matriz cuyas columnas diagonalizan las respectivas evoluciones, uktop/R pasan a ser lo mismo dagado
call copyxmat(vtop,uktop)
call cxconjugate(uktop)
call copyxmat(vtopR,uktopR)
call cxconjugate(uktopR)
! NEW!: interrumpo un segundo para calcular la LDoS, la proyección entre los elementos de las bases que diagonalizan F y F_0, respectivamente son <i,j_0> es el el
call cxmatdotxmat(uktop,vtopR,aux1)
! ~ eta=3.2e-2
! ~ eta=PI*1d-1
eta=PI/dble(DIMEN)/2
do j=1,DIMEN
do k=1,DIMEN
cohsz(k)=0d0
do i=1,DIMEN
cohsz(k)=cohsz(k)+(dble(aux1(i,j))**2+dimag(aux1(i,j))**2)*
*eta/(((acos(dble(phtop(i)))-acos(dble(phtop(k))))**2+eta**2)*PI)
end do
write(2,*) acos(dble(phtop(k))), dble(cohsz(k))
end do
write(2,*) ""
write(2,*) ""
end do

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Parte 3: Comienzo el loop para average

```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

do javg=1,NAVG
!~ do javg=64,64+NAVG-1
! Armo estados iniciales
!~ iseed=1547
!~ iseed=1547*javg
!~ iseed=javg
!~ theta=PI*ran1(iseed)
!~ phi=2.d0*PI*ran1(iseed)
!~ theta=PI*(dble(javg-1)/dble(NAVG))
!~ phi=2.d0*PI*(1-dble(javg-1)/dble(NAVG))
theta=PI/2d0*(0.5+dble(javg)/dble(NAVG))
phi=(dble(javg)/dble(NAVG))
!~ phi=0d0
!~ call coherentSz(cohsz,theta,phi,iseed)
call coherentSz(cohsz,theta,phi)
call cxnormvec(cohsz)
write(1,*) javg,theta,phi

!~ call gaussianSz(cohsz,javg*(n-1)/NAVG,NAVG-javg*(n-1)/NAVG,1d4)
!~ call gaussianSz(cohsz,javg*(n-1)/NAVG/2+n/2,0,1d3)

! Lo paso a la base de la evolución
call cxmatdotcxvec(uktop,cohsz,chttop)
call cxmatdotcxvec(uktopR,cohsz,chttopR)
! Normalizo (no debería ser necesario)
!~ call cxnormvec(chtop)
!~ call cxnormvec(chtopR)

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Parte 4: los hago evolucionar durante un tiempo maxtime
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!~ if (mtodo.eq.1) then
!~ write(7000+javg,*) "# spin ", sj
!~ write(8000+javg,*) "# spin ", sj
!~ write(9000+javg,*) "# spin ", sj
!~ write(1000+javg,*) "# spin ", sj
!~ write(2000+javg,*) "# spin ", sj
!~ end if

zmlos=dcmplx(0d0,0d0)
do k=1,n
zmlos=zmlos+dconjg(cohsz(k))*cohsz(k)
end do
call Wignerfunc(cohsz,wig1)
call Wignerfunc(cohsz,wig2)
call wiglosch(wig1,wig2,rmlos)
!~ call wigloschcorr(wig1,wig2,rmlosc)
!~ call wigmultipericentr(wig1,aux1)
!~ call wigmultipericentr(wig2,aux2)
call wigcentr(wig1,aux1)
call wigcentr(wig2,aux2)
call wiglosch(aux1,aux2,rmlosc)

if (mtodo.ge.1) then
write(7000+javg,*) 0,dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)**2
write(8000+javg,*) 0,rmlos
write(9000+javg,*) 0,rmlosc
end if
avlos(1,1)=avlos(1,1)+dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)**2
avlos(1,2)=avlos(1,2)+rmlos
avlos(1,3)=avlos(1,3)+rmlosc

amlos(1,1,javg)=dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)**2
amlos(1,2,javg)=rmlos
amlos(1,3,javg)=rmlosc

if (javg.eq.isavg) then
!~ if (mtodo.eq.2) then
!~ do k=1,n
!~ write(1000+javg,*) dble(psi(k))**2+dimag(psi(k))**2
!~ write(2000+javg,*) dble(psiR(k))**2+dimag(psiR(k))**2
!~ end do
!~ write(1000+javg,*) ""
!~ write(1000+javg,*) ""
!~ write(2000+javg,*) ""
!~ write(2000+javg,*) ""
!~ do m=1,n
!~ do k=1,n
!~ write(17000+javg,*) dble(wig1(k,m))
```

```

!~ write(27000+javg,*) dble(wig2(k,m))
!~ end do
!~ write(17000+javg,*) "NewLine"
!~ write(27000+javg,*) "NewLine"
!~ end do
!~ write(17000+javg,*) ""
!~ write(17000+javg,*) ""
!~ write(27000+javg,*) ""
!~ write(27000+javg,*) ""
!~ end if

do m=1,n
do k=1,n
write(17000+0,*) dble(wig1(k,m))
write(27000+0,*) dble(wig2(k,m))
write(37000+0,*) dble(wig1(k,m))*dble(wig2(k,m))
write(18000+0,*) dble(aux1(k,m))
write(28000+0,*) dble(aux2(k,m))
write(38000+0,*) dble(aux1(k,m))*dble(aux2(k,m))
end do
write(17000+0,*) "NewLine"
write(27000+0,*) "NewLine"
write(37000+0,*) "NewLine"
write(18000+0,*) "NewLine"
write(28000+0,*) "NewLine"
write(38000+0,*) "NewLine"
end do
write(17000+0,*) ""
write(17000+0,*) ""
write(27000+0,*) ""
write(27000+0,*) ""
write(37000+0,*) ""
write(37000+0,*) ""
write(18000+0,*) ""
write(18000+0,*) ""
write(28000+0,*) ""
write(28000+0,*) ""
write(38000+0,*) ""
write(38000+0,*) ""

do k=1,n
write(10000+0,*) dble(cohsz(k)**2+dimag(cohsz(k))**2)
write(11000+0,*) dble(cohsz(k)**2+dimag(cohsz(k))**2)
end do
write(10000+0,*) ""
write(10000+0,*) ""
write(11000+0,*) ""
write(11000+0,*) ""
end if

Print *, 'Avg:', NAVG-javg
do iter=1,maxit
!~ do iter=1,2
!~ Print *, 'Iter:', maxit-iter, ' Avg:', NAVG-javg

do k=1,n
psi(k)=chtop(k)*phtop(k)**mt(iter)
psiR(k)=chtopR(k)*phtopR(k)**mt(iter)
end do
!los pongo en la base S_z para poder visualizar
call cxmatdotcxvec_2(vtop,psi)
call cxmatdotcxvec_2(vtopR,psiR)
!~ call cxnormvec(psi)
!~ call cxnormvec(psiR)

zmlos=0
do k=1,n
zmlos=zmlos+dconjg(psiR(k))*psi(k)
end do
call Wignerfunc(psi,wig1)
call Wignerfunc(psiR,wig2)
call wiglosch(wig1,wig2,rmlosc)
!~ call wigloschcorr(wig1,wig2,rmlosc)
!~ call wigmultipericentr(wig1,aux1)
!~ call wigmultipericentr(wig2,aux2)
call wigcentr(wig1,aux1)
call wigcentr(wig2,aux2)
call wiglosch(aux1,aux2,rmlosc)

if (mtodo.ge.1) then
write(7000+javg,*) mt(iter),dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)
****2
write(8000+javg,*) mt(iter),rmlosc

```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
write(9000+javg,*) mt(iter),rmlosc
end if
avlos(iter+1,1)=avlos(iter+1,1)+dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)
***2
avlos(iter+1,2)=avlos(iter+1,2)+rmlosc
avlos(iter+1,3)=avlos(iter+1,3)+rmlosc

amlos(iter+1,1,javg)=dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)**2
amlos(iter+1,2,javg)=rmlosc
amlos(iter+1,3,javg)=rmlosc

if (javg.eq.isavg) then
if (mod(iter,interv).eq.0) then
!~ if (mtodo.eq.2) then
!~ do k=1,n
!~ write(1000+javg,*) dble(psi(k)**2+dimag(psi(k))**2
!~ write(2000+javg,*) dble(psiR(k)**2+dimag(psiR(k))**2
!~ end do
!~ write(1000+javg,*) ""
!~ write(1000+javg,*) ""
!~ write(2000+javg,*) ""
!~ write(2000+javg,*) ""
!~ do m=1,n
!~ do k=1,n
!~ write(17000+javg,*) dble(wig1(k,m))
!~ write(27000+javg,*) dble(wig2(k,m))
!~ end do
!~ write(17000+javg,*) "NewLine"
!~ write(27000+javg,*) "NewLine"
!~ end do
!~ write(17000+javg,*) ""
!~ write(17000+javg,*) ""
!~ write(27000+javg,*) ""
!~ write(27000+javg,*) ""
!~ end if

do m=1,n
do k=1,n
write(17000+iter,*) dble(wig1(k,m))
write(27000+iter,*) dble(wig2(k,m))
write(37000+iter,*) dble(wig1(k,m))*dble(wig2(k,m))
write(18000+iter,*) dble(aux1(k,m))
write(28000+iter,*) dble(aux2(k,m))
write(38000+iter,*) dble(aux1(k,m))*dble(aux2(k,m))
end do
write(17000+iter,*) "NewLine"
write(27000+iter,*) "NewLine"
write(37000+iter,*) "NewLine"
write(18000+iter,*) "NewLine"
write(28000+iter,*) "NewLine"
write(38000+iter,*) "NewLine"
end do
write(17000+iter,*) ""
write(17000+iter,*) ""
write(27000+iter,*) ""
write(27000+iter,*) ""
write(37000+iter,*) ""
write(37000+iter,*) ""
write(18000+iter,*) ""
write(18000+iter,*) ""
write(28000+iter,*) ""
write(28000+iter,*) ""
write(38000+iter,*) ""
write(38000+iter,*) ""

do k=1,n
write(10000+iter,*) dble(psi(k)**2+dimag(psi(k))**2
write(11000+iter,*) dble(psiR(k)**2+dimag(psiR(k))**2
end do
write(10000+iter,*) ""
write(10000+iter,*) ""
write(11000+iter,*) ""
write(11000+iter,*) ""
end if
end if

end do
end do

do m=1,3
avlos(1,m)=avlos(1,m)/dble(NAVG)
end do
write(7,*) 0,avlos(1,1)
```

```

write(8,*) 0,avlos(1,2)
write(9,*) 0,avlos(1,3)
do k=2,maxit+1
do m=1,3
avlos(k,m)=avlos(k,m)/dble(NAVG)
end do
write(7,*) mt(k-1),avlos(k,1)
write(8,*) mt(k-1),avlos(k,2)
write(9,*) mt(k-1),avlos(k,3)
end do

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Voy a probar ahacer algunas correcciones
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
nprom=2

do m=3,3
do mtme=nprom,maxit+1
do javg=1,NAVG
!~ nreal=0
do k=1,nprom
prom=amlos(mtme+k,m,javg)+amlos(mtme-k,m,javg)
end do
prom=prom/dble(2*nprom)

do k=2,nprom
dif=abs(amlos(mtme-k,m,javg)-amlos(mtme-k+1,m,javg))+abs(
*amlos(mtme+k-1,m,javg)-amlos(mtme+k,m,javg))
end do
dif=dif/(2*nprom)
dif=dif+abs(amlos(mtme-1,m,javg)-amlos(mtme+1,m,javg))/2d0

! Si sale demasiado de lo que va la linea, los ignoro o cambio por in promedio, que debería ser inofensivo...
if (amlos(mtme,m,javg).lt.prom-dif) then
!~ amlos(mtme,m,javg)=avlos(mtme,m)
!~ amlos(mtme,m,javg)=0d0
!~ nreal=nreal+1
amlos(mtme,m,NAVG+1)=amlos(mtme,m,NAVG+1)+avlos(mtme,m)
!~ else if (amlos(mtme,m,javg).gt.prom+dif) then
!~ amlos(mtme,m,javg)=avlos(mtme,m)
!~ amlos(mtme,m,javg)=0d0
!~ nreal=nreal+1
!~ amlos(mtme,m,NAVG+1)=amlos(mtme,m,NAVG+1)+avlos(mtme,m)
else
amlos(mtme,m,NAVG+1)=amlos(mtme,m,NAVG+1)+amlos(mtme,m,javg)
end if

!~ amlos(mtme,m,NAVG+1)=amlos(mtme,m,NAVG+1)+prom
end do
!~ amlos(mtme,m,NAVG+1)=amlos(mtme,m,NAVG+1)/dble(NAVG-nreal)
amlos(mtme,m,NAVG+1)=amlos(mtme,m,NAVG+1)/dble(NAVG)
end do
end do

write(9000,*) 0,avlos(1,3)
do k=2,nprom+1
write(9000,*) mt(k-1),avlos(k,3)
end do
do k=nprom+2,maxit+1
write(9000,*) mt(k-1),amlos(k,3,NAVG+1)
end do

end program

include "./include/F77/spin/sub_diagspin.f"
include "./include/F77/spin/sub_diagspinmat.f"
include "./include/F77/spin/sub_diagspinnumeric.f"
include "./include/F77/spin/sub_coherentSz.f"
!~ include "./include/F77/spin/sub_gaussianSz.f"
include "./include/F77/normvec/sub_cxnrmvec.f"
include "./include/F77/matrices/sub_cxconjugate.f"
include "./include/F77/matrices/sub_cxmatdotcxvec.f"
include "./include/F77/matrices/sub_cxmatdotcxvec_2.f"
include "./include/F77/matrices/sub_cxmatdotcxmat.f"
include "./include/F77/matrices/sub_copycxmat.f"
include "./include/F77/losch/sub_Wignerfunc.f"
include "./include/F77/losch/sub_wiglosch.f"
!~ include "./include/F77/losch/sub_wigloschcorr.f"
!~ include "./include/F77/losch/sub_wigpericentr.f"
!~ include "./include/F77/losch/sub_wigmultipericentr.f"
include "./include/F77/losch/sub_wigcentr.f"
!~ include "./include/F77/losch/sub_cxloschvecout.f"

```

D.2. Kicked Rotator

```

!
!
! Esto es fortran90 mas preprocesador, pero lo compilo con -fixed en ifort
! porque incluyo varias librerias en F77 y no compilaba. Dudo que funcione
! bien en otro compilador.
!
#define DIMEN 128
#define NAVG 5
#define MIT 100

program krot
implicit none

!~ integer, parameter :: DIMEN=512, NAVG=10, MIT=100
double precision, parameter :: PI=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148
double complex, parameter :: IM=dcplx(0,1)
integer :: interv,isavg,mtodo,javg,iter,i,j,k,m
double complex, dimension(DIMEN) :: psi,psiR
double complex, dimension(DIMEN,DIMEN) :: wig1,wig2,aux1,aux2
double complex :: zmos
double precision :: rmls,rmlsc,theta,phi,pert,ddk,x
double precision :: avlos(0:MIT,3,0:NAVG)

mtodo=1
interv=1
isavg=3
!~ isavg=0

      ddk=0 !chaos parameter
      pert=4d-5 !perturbation parameter

call random_seed()
!~ call random_number(x)

avlos=0

avgloop: do javg=1,NAVG
print *, "Avg:",javg
!~ iseed=1547
!~ iseed=1547*javg
!~ iseed=javg
!~ theta=PI*ran1(iseed)
!~ phi=2.d0*PI*ran1(iseed)
!~ theta=PI*(dble(javg-1)/dble(NAVG))
!~ phi=2.d0*PI*(1-dble(javg-1)/dble(NAVG))
!~ theta=PI/2d0*(0.5+dble(javg)/dble(NAVG))
!~ phi=(dble(javg)/dble(NAVG))
!~ phi=0
call random_number(x)
theta=PI*x
phi=2.d0*PI*x

!~ call coherentSz(cohsz,theta,phi,iseed)
call coherentSz(psi,theta,phi)
!~ psi=0
!~ psi(javg-1+DIMEN/2)=1
call cxnormvec(psi)
write(1,*) javg,theta,phi

!~ call gaussianSz(cohsz,javg*(n-1)/NAVG,NAVG-javg*(n-1)/NAVG,1d4)
!~ call gaussianSz(cohsz,javg*(n-1)/NAVG/2+n/2,0,1d3)

psiR=psi

zmos=0

iterloop: do iter=0,MIT

if (iter/=0) then
call iterate(psi,psiR,ddk,pert)
end if

```

D.2. KICKED ROTATOR

```
call losch(psi,psiR,wig1,wig2,aux1,aux2,zmlos,rmlos,rmlosc)

avlos(iter,1,javg)=dble(zmlos)**2+dimag(zmlos)**2
avlos(iter,2,javg)=rmlos
avlos(iter,3,javg)=rmlosc
avlos(iter,:,0)=avlos(iter,:,0)+avlos(iter,:,javg)

if (mtdo/=0) then
do m=1,3
write((m+6)*1000+javg,*) iter,avlos(iter,m,javg)
end do
end if

if (javg==isavg) then
if (mod(iter,interv)==0) then
call echo(psi,psiR,wig1,wig2,aux1,aux2,iter)
end if
end if

end do iterloop

do k=7,9
close(1000*k+javg)
end do
end do avgloop

avlos(:, :, 0)=avlos(:, :, 0)/dble(NAVG)

do m=1,3
do k=0,MIT
write(6+m,*) k,avlos(k,m,0)
end do
end do

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Voy a probar ahacer algunas correcciones
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

call fixerr(avlos)

do m=1,3
do k=0,MIT
write((6+m)*1000,*) k,avlos(k,m,0)
end do
end do

end program krot

! Calcula el eco por los tres metodos
subroutine losch(psi,psiR,wig1,wig2,aux1,aux2,zmlos,rmlos,rmlosc)
implicit none
integer :: k
double complex, dimension(DIMEN) :: psi, psiR
double complex, dimension(DIMEN,DIMEN) :: wig1,wig2,aux1,aux2
double complex :: zmlos
double precision :: rmlos,rmlosc

zmlos=0
rmlos=0
rmlosc=0
do k=1,DIMEN
zmlos=zmlos+dconjg(psiR(k))*psi(k)
end do

call Wignerfunc(psi,wig1)
call Wignerfunc(psiR,wig2)
!~ call wigmultipericentr(wig1,aux1)
!~ call wigmultipericentr(wig2,aux2)
call wigcentr(wig1,aux1)
call wigcentr(wig2,aux2)

call wiglosch(wig1,wig2,rmlos)
call wiglosch(aux1,aux2,rmlosc)
!~ call wigloschcorr(wig1,wig2,rmlosc)

end subroutine losch
```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
!  
! Este es una iteración del mapa, tanto común como perturbado  
!  
subroutine iterate(psi,psiR,ddk,pert)  
implicit none  
integer :: k  
double precision, parameter :: PI=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148  
double complex, parameter :: IM=dcmplx(0,1)  
double complex, dimension(DIMEN) :: psi, psiR  
double precision, dimension(2*DIMEN) :: vec,vecR  
double precision :: ddk,T,dk,pert,x,y  
  
T=2*PI/dble(DIMEN)  
!~ T=0.5  
dk=ddk/T  
  
x=1  
y=0  
!~ call random_seed()  
!~ call random_number(x)  
!~ call random_number(y)  
x=pert*x  
y=pert*y  
  
do k=1,DIMEN  
psi(k)=zexp(-IM*(k-1)**2*T/2d0)*psi(k)  
psiR(k)=zexp(-IM*(k-1)**2*(T+x)/2d0)*psiR(k)  
  
vec(2*k-1)=dble(psi(k))  
vec(2*k)=dimag(psi(k))  
vecR(2*k-1)=dble(psiR(k))  
vecR(2*k)=dimag(psiR(k))  
end do  
  
call dfour1(vec,DIMEN,1)  
call dfour1(vecR,DIMEN,1)  
  
do k=1,DIMEN  
! esto se podría evitar y poner directamente en el resultado en vec, pero creo que es lo  
! mismo ya que el vector psi ya está en la memoria de todos modos...  
psi(k)=dcmplx(vec(2*k-1),vec(2*k))  
psiR(k)=dcmplx(vecR(2*k-1),vecR(2*k))  
  
psi(k)=zexp(-IM*dk*dcos(2*PI*(k-1)/dble(DIMEN)))*psi(k)  
psiR(k)=zexp(-IM*(dk+y)*dcos(2*PI*(k-1)/dble(DIMEN)))*psiR(k)  
  
vec(2*k-1)=dble(psi(k))  
vec(2*k)=dimag(psi(k))  
vecR(2*k-1)=dble(psiR(k))  
vecR(2*k)=dimag(psiR(k))  
end do  
  
call dfour1(vec,DIMEN,-1)  
call dfour1(vecR,DIMEN,-1)  
  
do k=1,DIMEN  
psi(k)=dcmplx(vec(2*k-1),vec(2*k))/dble(DIMEN)  
psiR(k)=dcmplx(vecR(2*k-1),vecR(2*k))/dble(DIMEN)  
end do  
  
call cxnormvec(psi)  
call cxnormvec(psiR)  
  
end subroutine iterate  
  
!  
! Esto imprime las func de Wigner  
!  
subroutine echo(psi,psiR,wig1,wig2,aux1,aux2,iter)  
implicit none  
integer :: iter,m,k  
double complex, dimension(DIMEN) :: psi, psiR  
double complex, dimension(DIMEN,DIMEN) :: wig1,wig2,aux1,aux2  
  
do m=1,DIMEN  
do k=1,DIMEN  
write(17000+iter,*) dble(wig1(k,m))  
write(27000+iter,*) dble(wig2(k,m))  
write(37000+iter,*) dble(wig1(k,m))*dble(wig2(k,m))
```

D.2. KICKED ROTATOR

```
write(18000+iter,*) dble(aux1(k,m))
write(28000+iter,*) dble(aux2(k,m))
write(38000+iter,*) dble(aux1(k,m))*dble(aux2(k,m))
end do
write(17000+iter,*) "NewLine"
write(27000+iter,*) "NewLine"
write(37000+iter,*) "NewLine"
write(18000+iter,*) "NewLine"
write(28000+iter,*) "NewLine"
write(38000+iter,*) "NewLine"
end do

write(17000+iter,*) ""
write(17000+iter,*) ""
write(27000+iter,*) ""
write(27000+iter,*) ""
write(37000+iter,*) ""
write(37000+iter,*) ""
write(18000+iter,*) ""
write(18000+iter,*) ""
write(28000+iter,*) ""
write(28000+iter,*) ""
write(38000+iter,*) ""
write(38000+iter,*) ""

do k=1,DIMEN
write(10000+iter,*) dble(psi(k)**2+dimag(psi(k))**2)
write(11000+iter,*) dble(psiR(k)**2+dimag(psiR(k))**2)
end do
write(10000+iter,*) ""
write(10000+iter,*) ""
write(11000+iter,*) ""
write(11000+iter,*) ""

close(17000+iter)
close(27000+iter)
close(37000+iter)
close(18000+iter)
close(28000+iter)
close(38000+iter)
close(10000+iter)
close(11000+iter)
end subroutine echo

!
! Voy a probar ahacer algunas correcciones
!
subroutine fixerr(amos)
implicit none
integer :: nprom,k,m,mtme,javg,nreal
double precision amlos(0:MIT,3,0:NAVG),prom,dif,old,rat
nprom=4 !calculo con los proximos y anteriores 4
rat=2 !veo que no se salga mas de dos ordenes

do m=3,3
do mtme=nprom,MIT-nprom
old=amos(mtme,m,0)
amos(mtme,m,0)=0
!~ nreal=0
do javg=1,NAVG
prom=0
do k=1,nprom
prom=prom+amos(mtme+k,m,javg)+amos(mtme-k,m,javg)
end do
prom=prom/dble(2*nprom)

dif=1d0
!~ dif=0
!~ do k=2,nprom
!~ dif=dif+abs(amos(mtme-k,m,javg)-amos(mtme-k+1,m,javg))+abs(amos(mtme+k
!~ & k-1,m,javg)-amos(mtme+k,m,javg))
!~ end do
!~ dif=dif/(2*nprom)
!~ dif=dif+abs(amos(mtme-1,m,javg)-amos(mtme+1,m,javg))/2d0

if (abs(log(amos(mtme,m,javg))-log(prom)) > dif*rat) then
amos(mtme,m,javg)=prom
!~ amlos(mtme,m,javg)=old
!~ amlos(mtme,m,javg)=0d0
!~ nreal=nreal+1
```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
end if
amlos(mtme,m,0)=amlos(mtme,m,0)+amlos(mtme,m,javg)
end do
!~ amlos(mtme,m,0)=amlos(mtme,m,0)/dble(NAVg-nreal)
amlos(mtme,m,0)=amlos(mtme,m,0)/dble(NAVg)
end do
end do
end subroutine fixerr

! Replaces DATA by its discrete Fourier transform, if ISIGN is input as 1; or replaces DATA by
! NN times its inverse discrete Fourier transform, if ISIGN is input as -1. DATA is a complex
! array of length NN, or equivalently, a real array of length 2*NN. NN MUST be an integer
! power of 2 (this is not checked for!).
SUBROUTINE dfour1(data,nn,isign)
  INTEGER isign,nn
  DOUBLE PRECISION data(2*nn)
  INTEGER i,istep,j,m,mmax,n
  DOUBLE PRECISION tempi,temp
  DOUBLE PRECISION theta,wi,wpi,wpr,wr,wtemp
  n=2*nn
  j=1
  do 11 i=1,n,2
    if(j.gt.i)then
      tempr=data(j)
      tempi=data(j+1)
      data(j)=data(i)
      data(j+1)=data(i+1)
      data(i)=tempr
      data(i+1)=tempi
    endif
    m=n/2
1    if ((m.ge.2).and.(j.gt.m)) then
      j=j-m
      m=m/2
      goto 1
    endif
    j=j+m
11  continue
    mmax=2
2    if (n.gt.mmax) then
      istep=2*mmax
      theta=6.28318530717959d0/(isign*mmax)
      wpr=-2.d0*sin(0.5d0*theta)**2
      wpi=sin(theta)
      wr=1.d0
      wi=0.d0
      do 13 m=1,mmax,2
        do 12 i=m,n,istep
          j=i+mmax
          tempr=wr*data(j)-wi*data(j+1)
          tempi=wr*data(j+1)+wi*data(j)
          data(j)=data(i)-tempr
          data(j+1)=data(i+1)-tempi
          data(i)=data(i)+tempr
          data(i+1)=data(i+1)+tempi
12        continue
          wtemp=wr
          wr=wr*wpr-wi*wpi+wr
          wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
13        continue
          mmax=istep
        goto 2
      endif
      return
    END

include "./include/F77/spin/sub_coherentSz.f"
! include "./include/F77/spin/sub_gaussianSz.f"
include "./include/F77/normvec/sub_cxnrmvec.f"
include "./include/F77/losch/sub_Wignerfunc.f"
include "./include/F77/losch/sub_wiglosch.f"
! include "./include/F77/losch/sub_wigloschcorr.f"
! include "./include/F77/losch/sub_wigpericentr.f"
! include "./include/F77/losch/sub_wigmultipericentr.f"
include "./include/F77/losch/sub_wigcentr.f"
```

D.3. Librerías

```

! Generador de estados coherentes basado en lo de Jacquod. La modificación con respecto
! a este es que permito spin semientero (dmu en lugar de nmu)
! Abajo hay otras funciones que por lo visto no usa... (?)
! theta, phi se dejan como salida, así uno sabe que estados coherentes usa
! iseed es un entero semilla para el random
!
!
!~ subroutine coherentSz(cohsz,theta,phi,iseed)
subroutine coherentSz(cohsz,theta,phi)
parameter (DIMEN=512)
parameter (PI=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105
          *820974944592307816406286208998628034825342117067982148)

double complex cohsz(DIMEN)
double PRECISION ds,dmu,theta,phi,dnorm,dbico
integer nt
!,iseed
nt=DIMEN
! PI=4.d0*datan(1.d0)
ds=(nt-1)/2d0

!~ iseed=1547
!~ iseed=1547*iseed
! Comentar esto si se desea un theta, phi en particular...
!~ theta=PI*ran1(iseed)
!~ phi=2.d0*PI*ran1(iseed)

dnorm=0.d0
dbico=1.d0

do i=nt,1,-1
dmu=dfloat(i-1)-ds
if (i.lt.nt) then
dbico=dbico*dfloat(int(2*ds)-nt+i+1)/dfloat(nt-i)
end if

cohsz(i)=dcmplx(dcos(theta/2.d0)**(int(ds+dmu))*dsin(theta/2.d0
          ***(int(ds-dmu))*dsqrt(dbico),0.d0)*dcmplx(dcos(phi*(ds-dmu)),dsi
          *n(phi*(ds-dmu)))
dnorm=dnorm+dreal(cohsz(i))**2+dimag(cohsz(i))**2
enddo

do i=1,nt
cohsz(i)=cohsz(i)/dsqrt(dnorm)
enddo

end

FUNCTION ran1(idum)
INTEGER idum,IA,IM,IQ,IR,NTAB,NDIV
REAL*8 ran1,AM,EPS,RNMX
PARAMETER (IA=16807,IM=2147483647,AM=1./IM,IQ=127773,IR=2836,
          *NTAB=32,NDIV=1+(IM-1)/NTAB,EPS=1.2d-7,RNMX=1.-EPS)
INTEGER j,k,iv(NTAB),iy
SAVE iv,iy
DATA iv /NTAB*0/, iy /0/
if (idum.le.0.or.iy.eq.0) then
idum=max(-idum,1)
do 11 j=NTAB+8,1,-1
k=idum/IQ
idum=IA*(idum-k*IQ)-IR*k
if (idum.lt.0) idum=idum+IM
if (j.le.NTAB) iv(j)=idum
11 continue
iy=iv(1)
endif
k=idum/IQ
idum=IA*(idum-k*IQ)-IR*k
if (idum.lt.0) idum=idum+IM
j=1+iy/NDIV
iy=iv(j)
iv(j)=idum
ran1=min(AM*iy,RNMX)
return
END

FUNCTION bico(n,k)
INTEGER k,n
REAL bico

```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
CU  USES factln
REAL factln
bico=nint(exp(factln(n)-factln(k)-factln(n-k)))
return
END

FUNCTION factln(n)
INTEGER n
REAL factln
CU  USES gammln
REAL a(100),gammln
SAVE a
DATA a/100*-1./
if (n.lt.0) pause 'negative factorial in factln'
if (n.le.99) then
  if (a(n+1).lt.0.) a(n+1)=gammln(n+1.)
  factln=a(n+1)
else
  factln=gammln(n+1.)
endif
return
END

FUNCTION gammln(xx)
REAL gammln,xx
INTEGER j
DOUBLE PRECISION ser,stp,tmp,x,y,cof(6)
SAVE cof,stp
DATA cof,stp/76.18009172947146d0,-86.50532032941677d0,
*24.01409824083091d0,-1.231739572450155d0,.1208650973866179d-2,
*-.5395239384953d-5,2.5066282746310005d0/
x=xx
y=x
tmp=x+5.5d0
tmp=(x+0.5d0)*log(tmp)-tmp
ser=1.000000000190015d0
do 11 j=1,6
  y=y+1.d0
  ser=ser+cof(j)/y
11 continue
gammln=tmp+log(stp*ser/x)
return
END

! Esto genera los numeros m,m+1 (la linea diagonal sobre la diagonal) de Sx a spin arbitrario. (a menos del factor hbar/2)
! Luego Sy es la siagoal superior por -i y la inferior por i (son Hermitianas).
! dsz es la diagonal -sj...sj
! Nota, todo esto es con hbar=1, pero no ignoro el 1/2 de las de pauli (porque las de otros spines no son asi)
subroutine diagspinmat(dsx,dsy,dsz)
parameter (DIMEN=512)
! dsz=Sx con hbar=1, dsx=matriz de autovalores de Sx (lo diagonaliza), igual con Sy
double precision sj, sm, dxsup(DIMEN), dsz(DIMEN), dsx(DIMEN,DIMEN)
*, coefx
double complex dsy(DIMEN,DIMEN), dysup(DIMEN), coefy
integer n
! n=DIMEN=512*sj+1, donde sj es la magnitud del spin s^2, sm es la proyeccion del spin en z
n=DIMEN

! Armo las matrices (en realidad solo la diagonal superior, ya que Sx y Sy son tridiagonales, Hermitianas y de diagonal nula)
sj=(n-1)/2.0
sm=-sj
dsz(1)=-sj
do k=1,n-1
dxsup(k)=dsqrt(sj*(sj+1)-sm*(sm+1))/2
dysup(k)=(0.0,-1.0)*dsqrt(sj*(sj+1)-sm*(sm+1))/2
! Aumento el numero magnetico, y lo agrego a la lista de autovalores (diagonal de Sz)
sm=sm+1
dsz(k+1)=sm
end do
dxsup(n)=0.0
dysup(n)=(0.0,0.0)

! Imprimo autovalores y matriz
!~ print *, "\nLa diagonal superior de Sx (y un cero al final)"
!~ print *, dxsup
!~ print *, "La diagonal superior de Sy (y un cero complejo al final)"
!~ print *, dysup
!~ print *, "La diagonal de Sz (los autovalores)"
!~ print *, dsz,"\n"

! Calculo autovectores de Sx y Sz
```

D.3. LIBRERIAS

```

! La formula es $v_{k}=\frac{\lambda v_{k-1}-S_{k-1,k-2} v_{k-2}}{S_{k-1,k}}$ con $v_{1}=1$ y $v_{2}=\frac{\lambda}{S_{1,2}}$, donde $S_{i,j}$ es el elemento corres
! Pongo el primer elemento igual a 1 y luego normalizo
do m=1,n
  dsx(1,m)=1
  dsy(1,m)=(1.0,0.0)
  dsx(2,m)=dsz(m)/dxsup(1)
  dsy(2,m)=dsz(m)/dysup(1)
  do k=3,n
    dsx(k,m)=(dsz(m)*dsx(k-1,m)-dxsup(k-2)*dsx(k-2,m))/dxsup(k-1)
    dsy(k,m)=(dsz(m)*dsy(k-1,m)-dconjg(dysup(k-2))*dsy(k-2,m))/dysup(k-1)
  end do
end do

! Normalizo los autovectores
do m=1,n
  coefx=0
  coefy=(0.0,0.0)
  do k=1,n
    coefx=coefx+dsx(k,m)**2
    coefy=coefy+dsy(k,m)*dconjg(dsy(k,m))
  end do
  do k=1,n
    dsx(k,m)=dsx(k,m)/dsqrt(coefx)
    dsy(k,m)=dsy(k,m)/dsqrt(dble(coefy))
  end do
end do

! Imprimo los resultados
!~ print *, "La matriz que diagonaliza Sx"
!~ do k=1,n
!~ print *, "[", (dsx(k,1),l=1,n), "]"
!~ end do
!~ print *, "\nLa matriz que diagonaliza Sy\n"
!~ do k=1,n
!~ print *, "[", (dsy(k,1),"\t",l=1,n), "]"
!~ end do

end

! Esto genera los numeros m,m+1 (la linea diagonal sobre la diagonal) de Sx a spin arbitrario. (a menos del factor hbar/2)
! Luego Sy es la siagoal superior por -i y la inferior por i (son Hermitianas).
! dsz es la diagonal -sj...sj
! Nota, todo esto es con hbar=1, pero no ignoro el 1/2 de las de pauli (porque las de otros spines no son asi)
subroutine diagspinnumeric(dsx,dsy,dsz)
parameter (DIMEN=512)
! dsz=Sx con hbar=1, dsx=matriz de autovalores de Sx (lo diagonaliza), igual con Sy
double precision sj,sm,dsz(DIMEN),dsx(DIMEN,DIMEN),dxsup(DIMEN),dd
*(DIMEN),WORK(2*DIMEN-2)
double complex dsy(DIMEN,DIMEN)
integer n,INFO
! n=DIMEN=512*sj+1, donde sj es la magnitud del spin s^2, sm es la proyeccion del spin en z
n=DIMEN

! Armo las matrices (en realidad solo la diagonal superior, ya que Sx y Sy son tridiagonales, Hermitianas y de diagonal nula)
sj=(n-1)/2d0
sm=-sj
dsz(1)=-sj
do k=1,n-1
  dxsup(k)=dsqrt(sj*(sj+1)-sm*(sm+1))/2.0
! Aumento el numero magnetico, y lo agrego a la lista de autovalores (diagonal de Sz)
sm=sm+1
dsz(k+1)=sm
dd(k)=0d0
end do
dxsup(n)=0d0

! Diegonalizo numericamente
call dstev('V',n,dd,dxsup,dsx,n,WORK,INFO)

! Ordeno autovectores según autovalor (es innecesario con esta subrutina)
!~ call eigrt(dd,dsx,n,n)

! This gives eigenstates for J_y - note that J_y has the same spectrum as J_x and J_z
do i=1,n
  do j=1,n
    !~ dm=dmu-dfloat(j-1)-ds
    !~ dsy(j,i)=dsx(j,i)*dcmplx(dcos(0.5d0*PI*dmu),dsin(0.5d0*PI*dmu))
    dsy(j,i)=dsx(j,i)*dcmplx(dcos(0.5d0*PI*dsz(i)),dsin(0.5d0*PI*ds
      *z(i)))
  end do
end do

```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```

! Imprimo los resultados
!~ print *, "La matriz que diagonaliza Sx"
!~ do k=1,n
!~ print *, "[", (dsx(k,l),l=1,n), "]"
!~ end do
!~ print *, "\nLa matriz que diagonaliza Sy\n"
!~ do k=1,n
!~ print *, "[", (dsx(k,l),"\t\t",l=1,n), "]"
!~ end do

end

! Sort eigenvectors
!~ SUBROUTINE eigprt(d,v,n,np)
!~ INTEGER n,np
!~ REAL*8 d(np),v(np,np)
!~ INTEGER i,j,k
!~ REAL*8 p
!~ do 13 i=1,n-1
!~ k=i
!~ p=d(i)
!~ do 11 j=i+1,n
!~ if(d(j).ge.p)then
!~ k=j
!~ p=d(j)
!~ endif
!~ 11 continue
!~ if(k.ne.i)then
!~ d(k)=d(i)
!~ d(i)=p
!~ do 12 j=1,n
!~ p=v(j,i)
!~ v(j,i)=v(j,k)
!~ v(j,k)=p
!~ 12 continue
!~ endif
!~ 13 continue
!~ return
!~ END

!esto normaliza vectores complex*16
subroutine cxnormvec(vec)
parameter (DIMEN=512)
double complex vec(DIMEN), coef
integer n
n=DIMEN

do m=1,n
coef=(0.0,0.0)
do k=1,n
coef=coef+vec(k)*dconjg(vec(k))
end do
do k=1,n
vec(k)=vec(k)/dsqrt(dble(coef))
end do
end do

end

! Calcula la función de Wigner discreta W(x,p), en la matriz wig(x,p), haciendo FFT
! $W(x,p)=\int \psi^\dagger(x-\delta_x/2) \psi(x+\delta_x/2) e^{-i p \delta_x} \mathit{d}\delta_x$
! toma el vector 1,n como -n/2+1,n/2 (por periodicidad, como la FFT), entonces lo que hay entre
! n/2+1 y n es pasa a ser lo de +1 a +n/2 y lo de 1 a n/2 pasa a -n/2,0... Luego vuelve todo a lonormal
! Es decir que está heco para poner como componentes 1..n=2s+1 lo que es -s...s (spins).
!
! Funciona, para arrays de n grandes (n>64)
! Queda una parte imaginaria por el hecho de no sumar el último término, si n chico se nota, sino no.
!
subroutine Wignerfunc(psi,wig)
parameter (DIMEN=512)
parameter (PI=3.141592653589793238462643383279502884197169399375105
*820974944592307816406286208998628034825342117067982148)
double complex psi(DIMEN), wig(DIMEN,DIMEN),cnorm
double PRECISION rwig(2*DIMEN,DIMEN),phi
integer n
n=DIMEN

cnorm=dcmplx(0d0,0d0)
do m=1,n
do k=1,n

```

```

wig(k,m)=dcmplx(0d0,0d0)
end do
do k=-n/2+1,n/2
if (m+k .gt. 1) then
if (m+k .lt. n) then
if (m-k .gt. 1) then
if (m-k .lt. n) then
wig(k+n/2,m)=dconjg(psi(m-k))*psi(m+k)
end if
end if
end if
end if
end do
! Old: ahora los ordeno periodicamente
!~ do k=1,n
!~ rwig(2*k-1,m)=dble(wig(k,m))
!~ rwig(2*k,m)=dimag(wig(k,m))
!~ end do
do k=1,n/2
rwig(2*k-1,m)=dble(wig(k+n/2-1,m))
rwig(2*k,m)=dimag(wig(k+n/2-1,m))
end do
do k=n/2+1,n
rwig(2*k-1,m)=dble(wig(k-n/2-1,m))
rwig(2*k,m)=dimag(wig(k-n/2-1,m))
end do

call dfour1mat(rwig,m,n,1)

! Old: ahora los ordeno periodicamente
!~ do k=1,n
!~ wig(k,m)=dcmplx(rwig(2*k-1,m),rwig(2*k,m))
!~ end do
do k=1,n/2
wig(k+n/2-1,m)=dcmplx(rwig(2*k-1,m),rwig(2*k,m))
end do
do k=n/2+1,n
wig(k-n/2-1,m)=dcmplx(rwig(2*k-1,m),rwig(2*k,m))
end do

end do

! Sumo para quitar la parte imaginaria que no debería existir, o normalizar (sino debería salir normalizada, a n (por la FFT))
!~ cnorm=dcmplx(0d0,0d0)
!~ do i=1,n
!~ do j=1,n
!~ ! cnorm=cnorm+wig(i,j)
!~ cnorm=cnorm+dble(wig(i,j))
!~ cnorm=cnorm+dble(wig(i,j))*2
!~ end do
!~ end do
! phi=datan(dimag(cnorm)/dble(cnorm))
do i=1,n
do j=1,n
! wig(i,j)=wig(i,j)*zexp(-(0,1)*phi)
!~ wig(i,j)=wig(i,j)/cnorm
!~ wig(i,j)=wig(i,j)/sqrt(dble(cnorm))/dble(n/4)
wig(i,j)=wig(i,j)/dble(n)
!~ wig(i,j)=(dble(wig(i,j))+dimag(wig(i,j)))/dble(n)
end do
end do

end

! Replaces la columna ncol de la matriz DATOS by its discrete Fourier transform, if ISIGN is input as 1; or replaces DATA by
! NN times its inverse discrete Fourier transform, if ISIGN is input as -1. DATA is a complex
! array of length NN, or equivalently, a real array of length 2*NN. NN MUST be an integer
! power of 2 (this is not checked for!).

SUBROUTINE dfour1mat(datos,ncol,nn,isign)
INTEGER isign,nn
DOUBLE PRECISION datos(2*nn,ncol)
INTEGER i,istep,j,m,mmax,n
DOUBLE PRECISION tempi,temp
DOUBLE PRECISION theta,wi,wpi,wpr,wr,wtemp
n=2*nn
j=1
do 11 i=1,n,2
if(j.gt.i)then

```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
      tempr=datos(j,ncol)
      tempi=datos(j+1,ncol)
      datos(j,ncol)=datos(i,ncol)
      datos(j+1,ncol)=datos(i+1,ncol)
      datos(i,ncol)=tempr
      datos(i+1,ncol)=tempi
    endif
    m=n/2
1   if ((m.ge.2).and.(j.gt.m)) then
      j=j-m
      m=m/2
      goto 1
    endif
    j=j+m
11  continue
mmax=2
2   if (n.gt.mmax) then
      istep=2*mmax
      theta=6.28318530717959d0/(isign*mmax)
      wpr=-2.d0*dsin(0.5d0*theta)**2
      wpi=dsin(theta)
      wr=1.d0
      wi=0.d0
      do 13 m=1,mmax,2
        do 12 i=m,n,istep
          j=i+mmax
          tempr=wr*datos(j,ncol)-wi*datos(j+1,ncol)
          tempi=wr*datos(j+1,ncol)+wi*datos(j,ncol)
          datos(j,ncol)=datos(i,ncol)-tempr
          datos(j+1,ncol)=datos(i+1,ncol)-tempi
          datos(i,ncol)=datos(i,ncol)+tempr
          datos(i+1,ncol)=datos(i+1,ncol)+tempi
12         continue
        wtemp=wr
        wr=wr*wpr-wi*wpi+wr
        wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
13       continue
      mmax=istep
      goto 2
    endif
    return
  END

! Notar la func de Wigner resulta real, en Wignerfunc corrijo la parte real mayor
! e ignoro la imaginaria culpa de la FFT...
subroutine wiglosch(wig1,wig2,xlosch)
parameter (DIMEN=512)
double complex wig1(DIMEN,DIMEN),wig2(DIMEN,DIMEN)
double precision xlosch,coef1,coef2
n=DIMEN

xlosch=0d0
coef1=0d0
coef2=0d0

do i=1,n
do j=1,n
xlosch=xlosch+dbple(wig2(i,j))*dbple(wig1(i,j))
!~ coef2=coef2+dbple(wig2(i,j))**2
!~ coef1=coef1+dbple(wig1(i,j))**2
coef2=coef2+dbple(wig2(i,j))
coef1=coef1+dbple(wig1(i,j))
end do
end do
!~ xlosch=xlosch/dsqrt(coef2*coef1)
! Esta es inofensiva: coef==1 si está normalizada correctamente como probabilidad
xlosch=xlosch/(coef2*coef1)
!~ Esto lo dice JP Paz, pero sin el 2, aunque usando el espacio 2N*2N (sería lo mismo)
xlosch=xlosch*n*2

end

!
!
!
! x es la coordenada transformada, p es el m (proyeccion en z del momento angular)
!
!
subroutine wigcentr(wig1,wig2)
parameter (DIMEN=512)
double complex wig1(DIMEN,DIMEN),wig2(DIMEN,DIMEN)
```

D.3. LIBRERIAS

```
double precision coef1,xmom(DIMEN),pmom(DIMEN)
double precision rhox(DIMEN),rhop(DIMEN)
integer n,mx,mp,mx1,mx2,mp1,mp2
n=DIMEN

!~ coef1=0d0
xbar1=0d0
pbar1=0d0

do m=1,n
rhox(m)=0d0
rhop(m)=0d0
do k=1,n
rhox(m)=rhox(m)+dble(wig1(m,k))
rhop(m)=rhop(m)+dble(wig1(k,m))
!~ if (rhox(m).lt.0d0) rhox(m)=0
!~ if (rhop(m).lt.0d0) rhop(m)=0
! para el caso de que wig no este normalizada
!~ coef1=coef1+dble(wig1(k,m))
end do
end do
do m=1,n
!~ print *, rhox(m),rhop(m),coef1
!~ rhox(m)=rhox(m)/coef1
!~ rhop(m)=rhop(m)/coef1
!~ if (rhop(m).lt.0d0) print *, "DANGER!", rhop(m), rhop(m-1),coef1
end do

do k=1,n
xmom(k)=0d0
pmom(k)=0d0
do m=1,n
call centratasta(m,k,m1,n)
! Esto es cual tiene la menor dispersión cuadrática media
xmom(k)=xmom(k)+(m1-n/2)**2*(rhox(m))
pmom(k)=pmom(k)+(m1-n/2)**2*(rhop(m))
end do
end do

mx=n/2
mp=n/2
do k=1,n
if (xmom(k).lt.xmom(mx)) mx=k
if (pmom(k).lt.pmom(mp)) mp=k
end do

do k=1,n
do m=1,n
! Esto no funciona porque este mod da numeros negativos (!= octave/matlab)
!~ wig2(mod(k-mx+n/2-1,n)+1,mod(m-mp+n/2-1,n)+1)=wig1(k,m)
! y esto otro es muy largo, asi que hice una subroutine
!~ movex=k-mx+n/2
!~ movep=m-mp+n/2
!~ if (movex .lt. 1) movex=movex+n
!~ if (movex .gt. n) movex=movex-n
!~ if (movep .lt. 1) movep=movep+n
!~ if (movep .gt. n) movep=movep-n

call centratasta(k,mx,k1,n)
call centratasta(m,mp,m1,n)

wig2(k1,m1)=wig1(k,m)
end do
end do

!~ do k=1,n
!~ do m=1,n
!~ wig1(k,m)=wig2(k,m)
!~ end do
!~ end do

end

! Centra k al rededor de k0, llevando el antiguo valor de k0 a n/2, la dimensión del espacio es n (cond periodicas), la salida es m.
subroutine centratasta(k,k0,m,n)
integer k,k0,m,n
m=k-k0+n/2
!~ if (m .lt. 1) then
!~ m=m+n
!~ else if (m .gt. n) then
```

APÉNDICE D. PROGRAMAS PRINCIPALES: FORTRAN

```
!~ m=m-n
!~ end if
m=m-n*floor(dble(m-1)/dble(n))
end
```

Apéndice E

Programas de ayuda y automatización: C, Perl, Python y Bash

fitLoschner.c

```
/*  
compilación: gcc -Wall -I/ust/local/include -o fitter fitLoschner.c -lgsl -lgslcblas -lm  
ejecución: ./fitter datos.dat lyapunovs.dat 1.1 1e-6; cat lyapunovs.dat
```

```
Uso: progname filein fileout ddk alpha  
Toma datos desde un archivo filein salido de fortran que imprime pares tabulados  
int double  
int double  
int double  
int double  
(newline)
```

```
y fortran formatea muy feo; el int termina en la columna 14 y el  
double empieza en la 16, los arregla así:  
0 1.0000000000000000  
11000 0.550786203852970  
1100000 5.304638414893183E-014
```

luego saca el logaritmo de Y y fitea con una lineal, para sacar el exponente.
Pero solo fitea hasta el punto donde termina el decaimiento y comienza a
crecer, eso lo miro viendo si creció las tres veces anteriores.

Al final imprime al final del archivo fileout cuatro valores;
ddk alpha c1 chisq
que son los argumentos de el parámetro de torsión ddk, la perturbación alpha
(introducidos como argumentos del programa), el exponente de lyapunov obtenido
(con signo) y la suma de cuadrados resultado del ajuste.

```
*****  
#define MIT 100
```

```
#define LARGINT 14 //Hasta donde fortran escribe el int  
#define LARGDBL 26 //de alli hasta el final de la linea es el double
```

```
#include <stdio.h>  
#include <stdlib.h>  
#include <gsl/gsl_fit.h>
```

```
int main(int argc, char *argv[]){  
int DecayEnd=0;  
double x[MIT],y[MIT],w[MIT],g[MIT];  
double c0, c1, c2, cov00, cov01, cov11, chisq;  
double chisq2, ratio1, ratio2;  
char dataint[LARGINT],datadbl[LARGDBL];  
char *string="nan";
```

```
FILE *fin; //puntero a un archivo  
FILE *fout;  
fin=fopen(argv[1],"r"); //abro el archivo  
fout=fopen(argv[2],"a");
```

APÉNDICE E. PROGRAMAS DE AYUDA Y AUTOMATIZACIÓN: C, PERL, PYTHON Y BASH

```
/* printf("\tx\t\tlog(y)\t\tWeight\n");
int i=0;
while (feof(fin) == 0){ //feof da -1 si EndOfFile, está en stdio.h

fgets(dataint, LARGINT, fin); //toma LARGINT digitos de lo que lee

if(feof(fin)!=0){continue;}; //si el archivo termina en \n me repetia un valor

/* printf("%s|",dataint);
x[i]=atof(dataint); //transformo lo leído en float
fgets(datadbl, LARGDBL, fin);
/* printf("%s/",datadbl);
y[i]=log(atof(datadbl));
g[i]=sqrt(-y[i]);

w[i]=1;
DecayEnd=i;

if(i>=3){
if((y[i]-y[i-3])>0 && (y[i-1]-y[i-3])>0 && (y[i-2]-y[i-3])>0){
DecayEnd=i-3;
break; //El sistema ha decaído, rompo el while loop.
}
}

/* printf("%15.0f\t%1.15e\t%1.15e\n",x[i],y[i],w[i]);

i++;
}

// Esta es la parte donde se fitea
gsl_fit_wlinear (x, 1, w, 1, y, 1, DecayEnd,
                &c0, &c1, &cov00, &cov01, &cov11,
                &chisq);

ratio1=chisq/(double)DecayEnd;

gsl_fit_wlinear (x, 1, w, 1, g, 1, DecayEnd,
                &c0, &c2, &cov00, &cov01, &cov11,
                &chisq2);

ratio2=chisq2/(double)DecayEnd;

/* printf ("# best fit: y = %g + %g*x\n", c0, c1);
/* printf ("# covariance matrix:\n");
/* printf ("# [ %g, %g\n# %g, %g]\n",
/* cov00, cov01, cov01, cov11);
/* printf ("# chisq = %g\n", chisq);

if((ratio1>1 && ratio2>1)|| (DecayEnd<5)){string="non";}
else if(ratio2<pow(ratio1,2)){string="gau";} //es una buena aprox.
else{string="exp";}

fprintf(fout,"%1.1e\t%1.1e\t %1.15e\t%1.1e\t%1.15e\t %d\t %1.15e\t%1.1e\t%1.15e\t %s\n",
atof(argv[3]),atof(argv[4]),//ddk, alpha
c1,chisq,ratio1, //los ajustes de la exponencial
DecayEnd, //en que iteración termina el decaimiento (o 100)
c2,chisq2,ratio2, //los ajustes de la Gaussiana
string); //el veredicto si es Gaussiana o exponencial

return 0;
}
```

redone.py

```
# Recalcula los exponentes de decaimiento para todo lo hecho por hagamucho.sh
#!/usr/bin/python

import os
import sys
import glob
import re

DIMEN='512'
dir="dimen"+DIMEN
lst=glob.glob(dir+'/*maxtime*')

os.system("cp lyapunov_corr.dat lyapunov_corr.dat.BAK");
os.system("cp lyapunov_nocorr.dat lyapunov_nocorr.dat.BAK");
os.system("echo 'ddk alpha lambda_exp chisq_exp chisq/DecayEnd DecayEnd lambda_gau chisq_gau chisq/DecayEnd type'>lyapunov_corr.dat");
```

```

os.system("echo 'ddk alpha lambda_exp chisq_exp chisq/DecayEnd DecayEnd lambda_gau chisq_gau chisq/DecayEnd type'>lyapunov_nocorr.dat");

for lstobj in lst:
lstobj=lstobj.replace(dir+"/",'')

#~ m=re.search("maxtime_\S*-ddk",lstobj).group(0)
#~ m=m.replace('maxtime_', '')
#~ maxtime=m.replace('-ddk', '')

m=re.search("ddk_\S*-alpha",lstobj).group(0)
m=m.replace('ddk_', '')
ddk=m.replace('-alpha', '')

m=re.search("alpha_\S*",$).group(0)
alpha=m.replace('alpha_', '')

pwd=dir+"/"+lstobj+"/"

os.system("./fitLoschner "+pwd+"fort.7 lyapunov_nocorr.dat "+ddk+" "+alpha)
os.system("./fitLoschner "+pwd+"fort.9 lyapunov_corr.dat "+ddk+" "+alpha)

```

reformat.pl

```

#Convierte la salida de loschner.f o krot.f de las funciones de Wigner en algo usable por gnuplot
#!/usr/bin/perl -w

open(INFILE, $ARGV[0]) or die "Can't open file $ARGV[0]: $!";
open(OUTFILE, ">output.dat") or die "Can't open output.txt: $!";

while (<INFILE>) {
$line=$_;
if ($line =~ /\s+$/) {
$line="s/\s+//g";
print OUTFILE "$line";
}
elsif ($line =~ /\s+NewLine\s+$/) {
print OUTFILE "\n";
}
elsif ($line =~ /\s+$/) {
if ($tmp =~ /\s+$/) {
print OUTFILE "\n\n";
}
}
else{
$line="s/\ \ +//";
$line="s/\n$//";
print OUTFILE "$line\t";
}
$tmp=$line;
}

#~ $hola[4][1]=4;
#~ print "$hola[4][1]\n";

```

spinanim.pl

```

# Grafica la probabilidad a cada iteración segun la salida de loschner.f o krot.f
#!/usr/bin/perl -w
$DIMEN=512;
$abs=0.4*64/$DIMEN;
$FILEROOT=$ARGV[0];

# Abro gnuplot en la terminal
system("mkdir spin_Anim" );
open(GNUPLOT, "|gnuplot") or die "can't find gnuplot";
# Le mando algunas directivas
# para saber cuales fuentes hay, buscar en el resultado de "show fontpath"
print GNUPLOT "set term png enhanced font arial 8 transparent size 320,160\n";
print GNUPLOT "set term png enhanced size 480,320 font 'lmsbo10'\n";
print GNUPLOT "set xrange [0:$DIMEN]";
print GNUPLOT "set yrange [0:$abs]";
print GNUPLOT "set ylabel '|psi|^2';";
print GNUPLOT "set xlabel 'q=cos(theta)';";

if ($FILEROOT eq "fort.10"){
print GNUPLOT "set title 'Probability evolution in the K.Top';";
}

```

APÉNDICE E. PROGRAMAS DE AYUDA Y AUTOMATIZACIÓN: C, PERL, PYTHON Y BASH

```
}
elseif ($FILEROOT eq "fort.11"){
print GNUPLOT "set title 'Perturbed Probability evolution in the K.Top';";
}

#~ for($i=0;$i<=400;$i++){
for($i=0;$i<=200;$i=$i+4){
# Esto es para que todos los nombres de archivo tengan el mismo largo
$num=10**(3-length($i));
#~ $num=10**(2-length($i));
#~ print "$i\t$num\n";
#~ $num="s/~1/0/;
$num="s/~1//;
$num="$num$i";
# Cambio el archivo de salida y ploteo del archivo 'data'
print GNUPLOT "set output 'spin_Anim/spin$num.png';";
#~ print GNUPLOT "plot 'data.dat' index $i with lines smooth csplines title \"iter. $i \";";
print GNUPLOT "plot \"'$FILEROOT$num' with lines smooth csplines title \"iter. $i \";";
}
close(GNUPLOT);
# convert es raro; leer man convert para ver por que se repite size y resize y sino sale mal
#~ print "convirtiendo a gif animado\n";
#~ system("convert -antialias -delay 20 -size 480x320 -resize 480x320 ./spin_Anim/spin*.png spin_anim.gif");
print "Done spin_anim\n";
```

Wigneranim.pl

Gráfica la función de Wigner para cada iteración, luego de transformar la salida de loschner.f o krot.f con reformat.sh

```
#!/usr/bin/perl -w
$ini=$ARGV[0];
$ini="s/fort.//;
print "$ini\n";
$DIMEN=512;
$abs=1.6e-2*64/$DIMEN;

# Abro gnuplot en la terminal
system("mkdir Wigner_Anim");
open(GNUPLOT, "|gnuplot") or die "can't find gnuplot";
# Le mando algunas directivas
print GNUPLOT "set pm3d map;";
print GNUPLOT "set grid;";
# set palette defined(-10 "#000000", -9 "#302075", -1 "#30A0E0", 0 "#FFFFFF", 1 "#FFEE20", 9 "#CD1030", 10 "#000000")
print GNUPLOT "set palette defined(-10 \"#000000\", -9 \"#302075\", -1 \"#30A0E0\", 0 \"#FFFFFF\", 1 \"#FFEE20\", 9 \"#CD1030\", 10 \"#000000\"); ";
# set palette defined(0 "#000000", 1 "#831020", 2 "#CD1429", 3 "#E67118", 4 "#EEA110", 5 "#F6C608", 6 "#FFEE20", 7 "#FFFFFF", 8 "#29A5E6", 9 "#1081BD", 10 "#1081BD")
#~ print GNUPLOT "set palette defined(0 \"#000000\", 1 \"#831020\", 2 \"#CD1429\", 3 \"#E67118\", 4 \"#EEA110\", 5 \"#F6C608\", 6 \"#FFEE20\", 7 \"#FFFFFF\", 8 \"#29A5E6\", 9 \"#1081BD\", 10 \"#1081BD\");";
# Al cuadrado para el caso de las funciones multiplicadas (fort.3x)
# supongo Wmax=64/3e3

if ($ini==17){
#~ print GNUPLOT "set zrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set cbrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set title \"Wigner function in K.Top\";";
}
elseif ($ini==18){
#~ print GNUPLOT "set zrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set cbrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set title \"Centered Wigner function in K.Top\";";
}
if ($ini==27){
#~ print GNUPLOT "set zrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set cbrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set title \"Perturbed Wigner function in K.Top\";";
}
elseif ($ini==28){
#~ print GNUPLOT "set zrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set cbrange [-$abs:$abs];";
print GNUPLOT "set title \"Centered Perturbed Wigner function in K.Top\";";
}
elseif ($ini==37){
#~ print GNUPLOT "set zrange [-$abs**2:$abs**2];";
print GNUPLOT "set cbrange [-$abs**2:$abs**2];";
print GNUPLOT "set title \"W(q,p)*W'(q,p) in K.Top\";";
}
elseif ($ini==38){
#~ print GNUPLOT "set zrange [-$abs**2:$abs**2];";
print GNUPLOT "set cbrange [-$abs**2:$abs**2];";
print GNUPLOT "set title \"W(q,p)*W'(q,p) centered in K.Top\";";
}

print GNUPLOT "set xrange [0:$DIMEN];";
```

```

print GNUPLOT "set yrange [0:$DIMEN];";
# para saber cuales fuentes hay, buscar en el resultado de "show fontpath"
# print GNUPLOT "set term png enhanced font arial 8 transparent size 320,160\n";
# print GNUPLOT "set term png enhanced size 480,320 font 'lmsb010'\n";
print GNUPLOT "set term postscript color enhanced\n";
# print GNUPLOT "set term png enhanced size 480,320\n";
# print GNUPLOT "set yrange [0:0.4];";
# print GNUPLOT "set ylabel 'q=cos(theta)=m_s';";
print GNUPLOT "set ylabel 'q=cos(theta)=m_s';";
# print GNUPLOT "set xlabel 'p=phi';";
print GNUPLOT "set xlabel 'p=phi';";
print GNUPLOT "set origin -0.03,0;";
print GNUPLOT "set format cb '%3.0e';";
print GNUPLOT "set format z '%3.0e';";

for($i=0;$i<=1000;$i++){
# for($i=0;$i<=400;$i++){
# for($i=0;$i<=200;$i=$i+4){
# Esto es para que todos los nombres de archivo tengan el mismo largo
$num=10*(3-length($i));
# $num=10*(2-length($i));
# print "$i\t$num\n";
# $num="s/~1/0/;
$num="s/~1//;
$num="$num$i";
# print "$i\t$num\n";
# Cambio el archivo de salida y ploteo del archivo 'data'
# print GNUPLOT "set output 'Wigner_Anim/wigner$num.png';";
print GNUPLOT "set output 'Wigner_Anim/wigner$num.ps';";
# print GNUPLOT "splot 'output.dat' index $i matrix title \"iter. $i\";";
print GNUPLOT "splot 'output$ini$num.dat' matrix title \"iter. $i\";";
}
close(GNUPLOT);
# convert es raro; leer man convert para ver por que se repite size y resize y sino sale mal
# print "convirtiendo a gif animado\n";
# system("convert -antialias -delay 20 -size 480x320 -resize 480x320 ./wigner_Anim/wigner*.png Wigner_anim.gif; gzip -9 Wigner_anim.gif");
print "Done Wigner_anim\n";

```

reformatALL.sh

```

#!/usr/bin/perl -w
# reformataall for Loschner... Transforma la salida de las funciones de Wigner en algo suitable para gnuplot

for($i=0;$i<=400;$i++){
# for($i=0;$i<=5000;$i=$i+4){
# for($i=0;$i<=200;$i=$i+4){
# Esto es para que todos los nombres de archivo tengan el mismo largo
$num=10*(3-length($i));
# $num=10*(2-length($i));
# print "$i\t$num\n";
# $num="s/~1/0/;
$num="s/~1//;
$num="$num$i";
# print "$i\t$num\n";

$numcentr="fort.17$num";
$numcentr="fort.18$num";
$numcentrpert="fort.27$num";
$numcentrpert="fort.28$num";
$numsup="fort.37$num";
$numsupcentr="fort.38$num";
$OUT1="output17$num.dat";
$OUT2="output18$num.dat";
$OUT3="output27$num.dat";
$OUT4="output28$num.dat";
$OUT5="output37$num.dat";
$OUT6="output38$num.dat";
open(1, $numcentr) or die "Can't open file $numcentr: $!";
open(2, $numcentr) or die "Can't open file $numcentr: $!";
open(3, $numcentrpert) or die "Can't open file $numcentrpert: $!";
open(4, $numcentrpert) or die "Can't open file $numcentrpert: $!";
open(5, $numsup) or die "Can't open file $numsup: $!";
open(6, $numsupcentr) or die "Can't open file $numsupcentr: $!";
open(11, ">$OUT1") or die "Can't open $OUT1: $!";
open(12, ">$OUT2") or die "Can't open $OUT2: $!";
open(13, ">$OUT3") or die "Can't open $OUT3: $!";
open(14, ">$OUT4") or die "Can't open $OUT4: $!";
open(15, ">$OUT5") or die "Can't open $OUT5: $!";
open(16, ">$OUT6") or die "Can't open $OUT6: $!";

for($k=1;$k<=6;$k++){

```

```
$j=10+$k;
while (<$k>) {
$line=$_;
if ($line=~/\s+#/) {
$line="s/\s+//g;
print $j "$line";
}
elseif ($line =~ /\s+NewLine\s+$/) {
print $j "\n";
}
elseif ($line =~ /\s+$/) {
if ($tmp =~ /\s+$/) {
print $j "\n\n";
}
}
else{
$line="s/\ \ +//";
$line="s/\n$//";
print $j "$line\t";
}
$tmp=$line;
}
close($k);
close($j);
}
}
```

hagamucho.sh

```
#!/bin/sh
# Hagamucho for wigmidt. Automatiza el cálculo para muchos valores de los parametros perturbación y torsión

DIR=$(date | perl -wpe 's/\ /_/g')
DIR=Hagamucho_$DIR
mkdir $DIR

cp *.f $DIR/

gnuplot plotLE.gnuplot
mv LoschmidtEcho.png $DIR/

./reformatALL.pl

./wigneranim.pl fort.17
mv Wigner_Anim $DIR/wigner_Anim-fort.17
#~ mv Wigner_anim.gif $DIR/wigner_Anim Wigner_Anim-fort.17/

./wigneranim.pl fort.27
mv Wigner_Anim $DIR/wigner_Anim-fort.27
#~ mv Wigner_anim.gif $DIR/wigner_Anim Wigner_Anim-fort.27/

./wigneranim.pl fort.37
mv Wigner_Anim $DIR/wigner_Anim-fort.37
#~ mv Wigner_anim.gif $DIR/wigner_Anim Wigner_Anim-fort.37/

#~ cp -vf fort.10 data.dat
./spinanim.pl fort.10
mv spin_Anim $DIR/spin_Anim-fort.10
#~ mv spin_anim.gif $DIR/spin_Anim-fort.10/

./wigneranim.pl fort.18
mv Wigner_Anim $DIR/wigner_Anim-fort.18
#~ mv Wigner_anim.gif $DIR/wigner_Anim Wigner_Anim-fort.18/

./wigneranim.pl fort.28
mv Wigner_Anim $DIR/wigner_Anim-fort.28
#~ mv Wigner_anim.gif $DIR/wigner_Anim Wigner_Anim-fort.28/

./wigneranim.pl fort.38
mv Wigner_Anim $DIR/wigner_Anim-fort.38
#~ mv Wigner_anim.gif $DIR/wigner_Anim Wigner_Anim-fort.38/

#~ cp -vf fort.11 data.dat
./spinanim.pl fort.11
mv spin_Anim $DIR/spin_Anim-fort.11
#~ mv spin_anim.gif $DIR/spin_Anim-fort.11/

bip
echo "Done Hagamucho!"
```

Changespin.sh

```
#!/bin/sh
perl -i -wpe 's/DIMEN=\d+/DIMEN='$1'/g' ./*.f
perl -i -wpe 's/DIMEN=\d+/DIMEN='$1'/g' ./include/F77/*/*.f
perl -i -wpe 's/DIMEN=\d+/DIMEN='$1'/g' ./*.pl
```

logicalmap.f

```
! Dibuja el mapa clásico
program logicalmap

real x(180),y(180),z(180)
real rK
rK=1.1

open(unit=13, file='pagrafica.dat')
open(unit=7, file='grapa.gnuplot')

x(1)=0.1
y(1)=0.1
z(1)=0.1

write(7,*) 'set xrange [-0.15:0.15]'
write(7,*) 'set yrange [-0.15:0.15]'
write(7,*) 'set zrange [-0.15:0.15]'

do m=1,5
! rK=3.1*m-2
rK=2.1*(m-1)**2+0.5
write(7,*)"set title 'K=",rK,""
do n=1, 90
x(n+1)=z(n)*cos(rK*x(n))+y(n)*sin(rK*x(n))
y(n+1)=-z(n)*sin(rK*x(n))+y(n)*cos(rK*x(n))
z(n+1)=-x(n)
write(7,*)'set view',60+n/7,',',int(360-2*n)',',1,1'
write(7,*)'unset arrow'
write(7,*)'set arrow to',x(n+1)',',y(n+1)',',z(n+1)',lt 7'
write(7,*)'set arrow to 0,0,0.15 lt 3'
write(7,*)'set arrow to 0,0.15,0 lt 3'
write(7,*)'set arrow to 0.15,0,0 lt 3'
write(7,*)"splot 'pagrafica.dat' index", m-1
write(7,*)'pause 0.08'
write(13,*) x(n+1),y(n+1),z(n+1)
end do
write(7,*)"print 'Presione enter para seguir'"
write(7,*)'pause -1'
write(13,*)
write(13,*)
end do

close(unit=13)
end
```

APÉNDICE E. PROGRAMAS DE AYUDA Y AUTOMATIZACIÓN: C, PERL, PYTHON Y BASH

Bibliografía

- [ABB⁺99] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third edition, 1999.
- [AD05] Arturo Argüelles and Thomas Dittrich. Wigner function for discrete phase space: Exorcising ghost images. *Physica A*, 356:72, 2005.
- [BB87] J. Bertrand and P. Bertrand. *Found. Phys.*, **17**:397, 1987.
- [BGS84] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmidt. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, **52**:1, 1984.
- [Cuc04] Fernando Martín Cucchietti. *The Loschmidt echo in classically chaotic systems: Quantum chaos, irreversibility and decoherence*. PhD thesis, FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba, June 2004.
- [GS01] B. Georgeot and D. L. Shepelyansky. Exponential Gain in Quantum Computing of Quantum Chaos and Localization. *Phys. Rev. Lett.*, **86**:0010005, 2001.
- [Haa00] F. Haake. *Quantum signatures of chaos*. 2000.
- [HEMC06] Michael K. Henry, Joseph Emerson, Rudy Martinez, and David G. Cory. Localization in the quantum sawtooth map emulated on a quantum-information processor. *Phys. Rev. A*, **74**:062317, 2006.
- [HOSW84] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner. Distribution Functions in Physics: Fundamentals. *Phys. Rep.*, **106**:121–167, 1984.
- [JAB03] Phillipe Jacquod, ýl. Adagideli, and C. W. J. Beenakker. Anomalous power law of quantum reversibility for classically regular dynamics. *Europhys. Lett.*, **61**(6):729–735, 2003.

- [JP01] Rodolfo A. Jalabert and Horacio M. Pastawski. Environment-independent decoherence rate in classically chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, **86**:2490, 2001.
- [JSB01] Ph. Jacquod, P.G. Silvestrov, and C.W.J. Beenaker. Golden rule decay versus Lyapunov decay of the Loschmidt echo. *Phys. Rev. E*, **64**:055203, 2001.
- [LGS03] B. Lévi, B. Georgeot, and D. L. Shepelyansky. Quantum Computing of Quantum Chaos in the Kicked Rotator Model. *quant-ph/0210154*, 12 February 2003.
- [MPS02] C. Miquel, J. P. Paz, and M. Saraceno. Quantum Computers in Phase Space. *Phys. Rev. A*, **65**:062309, 2002.
- [Per84] A. Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Phys. Rev. A*, **30**:1610, 1984.
- [PZ01] Tomaz Prosen and Marko Znidaric. Can quantum chaos enhance stability of quantum computation? *J. Phys. A*, **34**:L681, 2001.
- [SV94] M. Saraceno and A. Voros. Towards a semiclassical theory of the quantum baker's map. *Physica D*, **79**:206, 1994.
- [VP04] G. Veble and T. Prosen. Faster than Lyapunov decays of the classical Loschmidt echo. *Phys. Rev. Lett.*, **92**:034101, 2004.
- [WC02] Diego A. Wisniacki and Doron Cohen. Quantum irreversibility, perturbation independent decay, and the parametric theory of the local density of states. *Phys. Rev. E*, **66**:046209, 2002.
- [Wig32] Eugene Wigner. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.*, **40**:749, 1932.
- [WVPC02] D. A. Wisniacki, E. G. Vergini, H. M. Pastawski, and F. M. Cucchietti. Sensitivity to perturbations in a quantum chaotic billiard. *Phys. Rev. E*, **65**:055206, 2002.
- [Zur01] Wojciech Hubert Zurek. Sub-Planck structure in phase space and its relevance for quantum decoherence. *Nature*, **412**:712, 16 August 2001.