Capítulo 2: Atractores Extraños y Geometría Fractal.

October 23, 2003

1 Modelo de Lorenz

Lorenz realizó un modelo simplificado de la atmósfera que constaba de 12 ecuaciones diferenciales acopladas. Al realizar simulaciones numéricas del mismo notó que el **error** debido al redondeo **en las condiciones iniciales** empladas para resolver la dinámica provocaba discrepancias intolerables entre una simulación y otra. Concluyó que →*hay sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.*

Ésta idea la expresó en una conferencia en 1979 cuyo famoso título fue "**Predictibilidad: ¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas?**"

Ésta conducta hace imposible realizar una predicción todo lo detallada que uno quiera por un tiempo todo lo largo que uno quiera.

Buscó una simplificación de las ecuaciones de movimiento para el modelo de la atmósfera que conserva sus propiedades , i.e. que contienen cierta pauta repetitiva pero que nunca vuelven exactamente al valor inicial de forma que nunca se alcance el equilibrio. Halló que el mismo tipo de comportamiento aparece en las tres ecuaciones que describen la convección de Rayleigh-Bénard (también **muy** simplificadas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(-x+y)\\ \dot{y} &= -zx+rx-y\\ \dot{z} &= xy-\frac{8}{3}z\end{aligned}$$

x: Amplitud de movimiento convectivo.
y: Diferencia de temperatura entre las corrientes ascendente y descendente.
z: Desviación del perfil vertical de temperaturas de la linealidad.

gráfico: cubeta con cilindros convectivos de Rayleigh-Bénard

El comportamiento del modelo de Lorenz depende fuertemente del parámetro r:

$0 < r < 1$
Todas las trayectorias tienden al origen en trayectorias en espiral→ATRACTOR
Transporte de calor es por conducción
gráfico: Trayectorias generadas para los valores
$1 < r < 24.7368$
El origen pierde su estabilidad.
Aparecen dos nuevos **puntos de equilibrio**→ $ATRACTORES$

$$C^+ = \left(\sqrt{10(r-1)}; +r\sqrt{10(r-1)}; (r-1)\right)$$
$$C^- = \left(-\sqrt{10(r-1)}; -r\sqrt{10(r-1)}; (r-1)\right)$$

Transporte de calor por convección.
grafico
$r < 24.06$
Aparece un *Atractor Extraño*, muy complejo
La trayectoria comienza en un punto inicial viendose atraída por el atractor en el que empieza a describir una serie de espirales alrededor de los puntos C^+ y C^- de forma que los sucesivos cambios ocurren a intervalos irregulares.
grafico del Atractor de Lorenz (Buho) con los atractores dentro de los ojos.

Debida a la representacion 2D del atractor, cabe aclarar que las trayectorias no se cruzan. Además el atractor parece estar formado por dos superficies que se unen en el centro, el atractor tiene cierta anchura muy pequeña de forma que ocupa un volumen cero y un área infinita. Esta geomentria no convencional se denomina Fractal.

1.1 Caos en Láseres

Un ejemplo físico que responde a las ecuaciones de Lorenz es el modelo de Haken para láseres de estado sólido.

$$\dot{E} = k(P - E)$$
$$\dot{P} = \gamma_1(ED - P)$$
$$\dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP)$$

E: Campo eléctrico dentro de la cavidad.
P: Polarización media de los átomos.
D: Inversión de población.

k: Velocidad de transferencia al haz.
γ_1: Velocidad de decaimiento de P.
γ_2: Velocidad de decaimiento de D.
λ: Bombeo de energía desde el exterior.

Haciendo el cambio de variables $\lambda = r - 1, \gamma_1 = \frac{1}{10}k, \gamma_2 = \frac{8}{30}k, \alpha = \sqrt{\frac{3}{8(r-1)}}, t_{láser} = \frac{10}{k} t_{lorentz}, E = \alpha x, P = \alpha y, D = r - 2$
se obtienen las ecuaciones del modelo de Lorenz.

2 Atractores

Podemos definirlos como el conjunto al que todas las trayectorias vecinas convergen, o mas etrictamente como el conjunto cerrado que cumple con las siguientes propiedades:

Invariantes frente a la dinámica del sistema: cualquier trayectoria que comienza en el atractor permanece en el indefinidamente.

Atrae a un conjunto abierto de condiciones iniciales cercanos a él. Al conjunto más grande se llama cuenca de atracción.

Mínimo: ningún subconjunto de él puede satisfacer las propiedades anteriores.

Tipos de atractores que pueden aparecer en un sistema dinámico:
Punto fijo: ya visto en la primera lección.
Ciclo límite: ejemplo: Oscilador de Van der Pol.
Toro invariante: generalización del ciclo límite a varias dimensiones.
Atractor extraño: atractor que exhibe una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Ejemplos: modelo de Lorenz, atractor de Rössler, Doble voluta, Mapa de Hénon.

2.0.1 Oscilador de Van der Pol

Ecuaciones del circuito fuente-bobina-capacitor-elemento no lineal:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = V_c - V$$
$$C\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{dt}} = -I$$

La caida de tensión en el elemento no lineal es

$$V = \lambda\left(\frac{I^3}{3} - I\right)$$

Realizando el cambio de variables $x = I, y = V_t, t \rightarrow t' = 1/\sqrt{L/C}$, se obtiene

$$\dot{x} = y\sqrt{C/L} - \lambda\sqrt{C/L}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$
$$\dot{y} = x\sqrt{C/L}$$

esto es

$$\ddot{x} + \underbrace{\varepsilon(x^2-1)\dot{x}}_{*} + x = 0 \quad , \quad \varepsilon = \lambda\sqrt{C/L}$$

*este término amortigua las oscilaciones de x cuando $x > 1$ y las amplifica cuando $x < 1$. Así las variaciones de x se estabilizan para cada valor del parámetro ε convergiendo a un ciclo.

2.0.2 Atractor de Rössler

$$\dot{x} = -y - z$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

2.0.3 Doble voluta

Aparece en el circuito de Chua (es el experimento que se muestra en el osciloscopio)

2.0.4 Mapa de Hénon

$$x_{n+1} = y_n + 1 + ax_n^2$$
$$y_{n+1} = bx_n$$

Este mapa es autosimilar en todas sus escalas.

2.1 Técnica de reconstrucción de atractores

A partir de los resultados de la reacción de Belousov-Zhabotinski[1] se reconstruye el atractor utilizando información de sólo una de las series temporales de una de las variables del sistema.

Se trata de representar los datos en espacios de dimensión cada vez mayor para lo cual se introduce el número adecuado de retraso.

[1] Un experimento menos complejo de reacción química oscilante es: en un vaso de precipitación con agitación constante se coloca una solución de ácido sulfúrico. Luego se añade ácido malónico, bromato potacio y sulfato de manganeso. La disolución alterna entre rosado e incoloro en forma no periódica.

Los datos iniciales son una serie temporal de una magnitud obtenida a intervalos regulares $x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), ...,$

El procesamiento de los datos para inferir la ley que los generó, propuesto por *Crutch eld, Farmer, Packard y Shaw,* involucra representar primero en un espacio de dimensión dos los pares $(x(t), x(t+\tau))$, luego las ternas $(x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau))$ y así sucesivamente hasta que se encuentre la dimensión en que esté embebido el atractor. Luego realizando cortes en el atractor puede reconstruirse el mapa.

Finalmente se concluye que la ecuación correspondiente corresponde un mapa de simple maximo, que pertenece a *la misma clase de universalidad*, es decir tiene el mismo comportamiento cuantitativo, *que la ecuación logística*.

gráfico: se muestra el mapa

3 Fractales

Estos son objetos de dimensión fraccionaria, otra propiedad características es la autosemejansa o simetria de escala. En los objetos que se encuentran en la naturaleza, esta autosemejanza no es exacta sino solo aproximada o estadística.

Para calcular la dimensión se puede contar el número de segmentos de longitud ε necesarios para cubrir el segmento inicial $N(\varepsilon) = L\varepsilon^{-1}$, o bien la cantidad de cuadraditos de área ε^2 necesarios para cubrir una superficie S $N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-2}$, o en gral $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-d}$. Luego la dimensión fractal[2] viene dada por

$$d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log\left[N(\varepsilon)\right]}{\log(\varepsilon)}$$

Para el conjunto de Cantor tenemos que

# iteración	ε	$N(\varepsilon)$
0	1	1
1	1/3	2
2	1/9	4
k	$1/3^k$	2^k

por lo que

$$d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log\left[N(\varepsilon)\right]}{\log(\varepsilon)} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log(2^k)}{\log(3^k)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309...$$

i.e $1 < d < 2$

Otros ejemplos son:

[2] Ésta definición se conoce por dimensión de capacidad. Otras definiciones no tienen porqué dar el mismo valor.

Alfombra de Sierpinski

$$d = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.892$$

Esponja de Menger

$$d = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268$$

Curva de Koch

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619$$

Triangulo de Sierpinski

$$d = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5850$$

gráficos: Ver colección de graficos complementaria

3.1 Mapa de Mandelbrot

Mandelbrot analizó la distribución de errores cuando dos ordenadores se comunican por via telefonica. Ello sugirio la introduccion de la redundancia para corregir errores.

Tambien estudió el mapa de los matemáticos Julia y Fatou:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad , \qquad z_n, c \in \mathbb{C}$$

¿Qué órbitas de ésta iteración se escapan al infinito? Analicemos un caso simple: c=0

$z_0 = 2, \quad z_1 = 4, \quad z_2 = 16, ... \to \infty$

$z_0 = 0.1, \quad z_1 = 0.001, \quad z_2 = 0.0001, ... \to 0$

Para z_n, c realmente complejos éste análisis se complica un poco. La frontera entre las regiones de los puntos que se escapan al infinito y los que permanecen ligados se conoce como CONJUNTO DE JULIA. Éstos conjuntos pueden ser o bien conexos o bien totalmente disconexos. Julia demostó que el conjunto asociado a un valor del parámetro c es conexo si y sólo si la órbita con $z_0 = 0$ no escapa a infinito. El conjunto de MANDELBROT es el conjunto de todos los puntos c cuyo conjunto de Julia asociado es conexo, i.e. lo puntos dados por el mapa

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad \text{con} \qquad z_0 = 0$$

En el gráfico del conjunto de Mandelbrot los puntos de color azul pertenecen al mismo, los demas colores indican la cantidad de iteraciones necesarias para que tal orbita se escape a infinito.

Éste conjunto no es autosemejante pero pueden encontrarse copias similares en el interior del mismo.

Gráficos: Se recomienda visualizar los sistemas fractales con el programa **Fractint** de distribución libre.