

# 1 Teoría del caos y Dinámica lineal

Curso audiovisual dictado por los profesores:

Florentino Borondo (UAM) y Rosa M. Benito (UPM).

Adaptado y presentado en la UNC por Horacio M. Pastawski (Prof. Asoc. FaMAF-UNC).

Transcripción de Notas Elena Rufeil Fiori (Ay. Alumna FaMAF-UNC)

Preparación de Web-page por Luis Foa Torres. (JTP FCQ-UNC)

Corrección de códigos Maple por Ernesto Danieli (Aux 2da FCQ-UNC).

## CAPITULO 1

### 2 Concepto de caos

Diccionario Espasa (1998)

1) Estado de desorden e indeterminación absoluta que según ciertas teorías o creencias religiosas precedió a la constitución del universo o cosmos.

2) Confusión o desorden

3) Mitología: Vacio primordial anterior a la creación del cosmos. En él coexistía Erebro (Las Tinieblas) y Nicté (La Noche) que al separarse entre sí y ambos del Caos, dieron lugar al nacimiento de Urano (El cielo) y Gea (La Tierra).

) Caos determinista: conducta extremadamente complicada que deriva de unas ecuaciones matemáticas bien definidas, muchas veces muy sencillas.

) Caos: estructura matemática inherente. Extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

Kuhn; Revoluciones en la Física

1era Gran Revolucion Copernicana ==> Mecanica Newtoniana ==> Determinismo (Laplace, Poincaré)

**BOLTZMANN el mayor revolucionario del siglo XIX.**

reversibilidad microscópica ==> molecular chaos-impredictibilidad ==> descripción estadística ==> irreversibilidad macroscópica

Revoluciones de la Física del siglo XX,

1-Relatividad.

2-Mecanica Cuántica.

3-Caos...?

Efecto Mariposa. La extrema susceptibilidad a las condiciones iniciales. Por ejemplo: **se muestra el juego de "pin-ball"**

*Las trayectorias muy proximas divergen (van separandose entre si) exponencialmente. (esto lo puse mas abajo).*

Se cuantifica con el concepto de exponente de Lyapunov

$\lambda$ : exponente de Lyapunov

$\lambda > 0$  Caos

**gráfico de trayectorias que se separan**  $d_t = d_0 e^{\lambda t}$

Tercera revolución de la Física del siglo XX, en el concepto de Kuhn.

1-Relatividad. (Einstein)

2-Mecanica Cuántica. (Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Pauli, Dirac)

3-Caos...?

## 3 Mapas

### 3.1 El mapa más simple.

Consideremos que la mitosis de **una** célula (factor de reproducción 2), ocurre a intervalos regulares de tiempo dados por los clicks de un reloj  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5...$  en presencia de alimento infinito y vida ilimitada. Solemos decir que la población crece geoméricamente. Supongamos que en tiempo 0 teníamos una sola célula  $x_0 = 1$ , luego al tiempo siguiente tenemos:

$$x_1 = (\text{célula+hija}) = 2x_0 = 2$$

$$x_2 = 2x_1 = 4x_0 = 4$$

$$x_3 = 2x_2 = 8x_0 = 8$$

$$x_4 = 2x_3 = 16x_0 = 16$$

$$x_5 = 2x_4 = 32$$

...

La regla general resultante se denomina mapa y relaciona la cantidad de individuos en una generacion  $x_{n+1}$  con los que había en la anterior  $x_n$ :

$$x_{n+1} = (2) x_n$$

La iteración nos dá:

$$x_n = x_0 \times (2)^n = x_0 (e^{\ln 2})^n = x_0 e^{\lambda \times n}$$

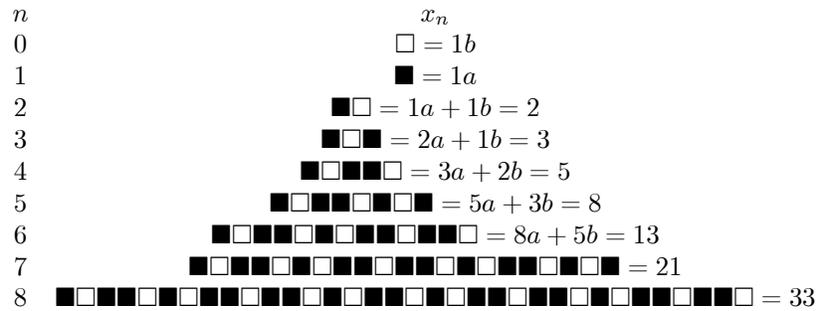
donde reescribimos el factor de reproducción 2 usando la identidad:  $2 = e^{\ln 2}$  que nos sirve para definir el exponente  $\lambda$  que gobierna el crecimiento exponencial de la mitosis.

$$\lambda = \ln 2$$

Si la aparición de la primera célula en el medio propicio, puede ser la enfermedad indeseada de que crece exponencialmente con el exponente característico de Lyapunov.

**El mapa de Fibonacci**

Supongamos que la célula puede tener un **hijo (b)** solo si ya es **adulto (a)**.



y así siguiendo. Notar que la secuencia gráfica “casi” parece periódica!

La regla o mapa general que relaciona **tres** generaciones sucesivas es

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

veamos como se comporta la sucesión de Fibonacci:

1/0 = upa! este no vale!

1/1 = 1

2/1 = 2

3/2 = 1.5

5/3 = 1.6666...

8/5 = 1.6

13/8 = 1.625

21/13 = 1.61538...

34/21 = 1.61904...

1.6180339887499... =  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  número irracional = razón aurea

usada por los griegos para establecer la suprema armonía.

**Tarea:** demostrar que la población también aquí crece geoméricamente donde el **factor de reproducción**  $e^\lambda$  es aquí

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\lambda$$

$\lambda$  está relacionando con el mayor autovalor de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Mapa de Bernoulli

Veremos como un mapa puede generar “ruido” incontrolado.

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \quad (1)$$

donde  $x \pmod{1} = 1$ -parte entera de  $x$

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2 - x_n & 0 < x_n < 1/2 \\ 2x_n - 1 & 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Este mapa tiene una dinámica determinista.

Ejemplo.

Consideremos el numero

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{155}{256} = 0.60547_{10} \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

:Expresamos este numero en representación binaria, e iteramos con una computadora con representacion finita de ocho digitos (bits). Cada iteración elimina el primer digito que sigue al punto decimal:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.10011011 \\ x_1 &= 0.0011011 \text{ un bit de ruido} \\ x_2 &= 0.011011 \text{ dos bits de ruido} \\ x_3 &= 0.11011 \text{ ..} \\ x_4 &= 0.1011 \text{ ...} \\ x_5 &= 0.011 \text{ ....} \\ x_6 &= 0.11 \\ x_7 &= 0.1 \\ x_8 &= 0. \text{ puro ruido} \end{aligned}$$

### Cálculo complementario: Crecimiento del error.

Si en lugar del número  $0.60547_{10}$  hubieramos errado en la última cifra binaria es decir

$$x'_0 = \frac{77}{128} = 0.60156_{10} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

:nuestro error inicial hubiera sido

$$\delta x_0 = |x'_0 - x_0| = \left| \frac{77}{128} - \frac{155}{256} \right| = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

con lo que en la iteracion se genera un error

$$\begin{aligned} \delta x_7 &= |x'_7 - x_7| = \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} \delta x_0 \\ &= \delta x_0 \exp[\lambda \times 7] \text{ con } \lambda = -\ln[1/2] \end{aligned}$$

En general

$$\delta x_n = \delta x_0 \exp[\lambda \times n]$$

Es decir el factor de crecimiento 2 genera un **crecimiento exponencial del error inicial** caracterizado por el exponente de Lyapunov

$$\lambda = -\ln[1/2] = \ln[2] = 0.693\ 15 = \frac{1}{1.4427}$$

que finalmente destruye la información de que disponía. : *característica del caos: ubicuidad*

### 3.3 Mapa Logístico

Dinámica de poblaciones (biológicas en áreas aisladas). Se busca saber la población al tiempo o generación  $m + 1$  conocido la población en la generación anterior. Ahora se supone que la competencia por el espacio o la comida genera un término **no-lineal** (reacción bi-molecular) que tiende a disminuir la población.

$$x_{n+1} = f_r(x_n) \tag{3}$$

$$= \underbrace{rx_n}_{\substack{\text{creci-} \\ \text{miento} \\ \text{de la} \\ \text{población}}} - \underbrace{rx_n^2}_{\substack{\text{límite al} \\ \text{crecimiento} \\ \text{de la población} \\ \text{No lineal}}} \tag{4}$$

$$0 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 4.$$

Resumen de Comportamiento de  $x_n$  según el valor de  $r$ .

**Se muestran gráficos de la evolución de la población  $x_n$  vs  $n$  para distintos valores iniciales.**

<i>Parámetro</i>	<i>Valor Asintótico de <math>x_n</math></i>
$r < 1$	$0 \rightarrow$ extinción
$1 < r < 3$	$1 - \frac{1}{r} \rightarrow$ población final estable
$3 < r < 3.449$	pobl. final oscila entre <b>dos</b> valores pobl. final oscila entre <b>4, 8, 16</b> valores
$3.449 < r < 3.56994546$	cascada de bifurcaciones por duplicación de períodos
$3.56994546 < r$	<b>CAOS</b>

**Se muestra el diagrama de bifurcaciones.** Se amplia en la zona 3.5-3.6 donde se ve una ventana de regularidad dentro de la zona caótica con varios períodos.

3.8-3.9 se ve una ventana de regularidad de período 3.

En 3.975 a 3.98 hay una ventana muy angosta.

### 3.4 Números de Feigenbaum (1978)

(gráfico de bifurcaciones)

$d$  mide la distancia entre puntos fijos evaluados en la zona “superestable” (punto fijo de tangente horizontal). Las distancias disminuyen a medida que  $r$  se acerca al caos.

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (5)$$

$$= 4.669201609... \quad (6)$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \quad (7)$$

$$= 2.50298... \quad (8)$$

Metropolis, Stein e Stein demostraron la *universalidad en el mapa logístico*. En todos los mapas con máximo cuadrático. Los números de Feigenbaum son tan universales como  $\pi$  o  $e$ .

### 3.5 Puntos Fijos

En el gráfico con  $f(x)$  vs  $x$  junto con  $x$  vs  $x$  se muestran las trayectorias de evolución hacia el punto fijo. Los puntos fijos  $x_{pf}$  se definen como

$$x_{pf} = f(x_{pf}) \quad (9)$$

#### 3.5.1 Estable

Ejemplo:

$$x_{pf} = rx_{pf}(1 - x_{pf}) \quad (10)$$

$$x_{pf} = \begin{cases} 0 \\ 1 - \frac{1}{r} \end{cases} \quad (11)$$

gráfico parábola intersección recta

### 3.5.2 Órbitas Periódicas

La población oscila entre p valores. Período p:  $x_{op} : x_1, \dots, x_{p-1}, x_0$

$$x_{op} = f^F(x_{op}) \quad (12)$$

Ejemplo:

Órbita Periódica de período 2: Raíces del polinomio  $f^2(x) = f(f(x))$

$$x = r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] \quad (13)$$

**grafico de cuártica  $f^2(x)$  con recta  $x$**

Punto fijo es

**Estable:** Atrae hacia sí las trayectorias que están en su vecindad

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{pf}} < 1$$

atrae a las que empiezan a la izquierda o a la derecha.

**Inestable:** Repele las trayectorias que están en su vecindad

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{pf}} > 1$$

Las trayectorias de alejan.

**Indiferente;**

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{pf}} = 1$$

un lado se atrae y el otro se repele.

**superestable**

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{pf}} = 0$$

muy rápidamente convergen todas las trayectorias.

Se muestra un circuito R, L, D(iodo). El Diodo D es el elemento no-lineal.

Graficando corriente versus voltage en la fuente se obtiene el diagrama de bifurcaciones.

Otro circuito es el circuito de Chua, compuesto por una inductancia, dos condensadores, una resistencia y una resistencia no lineal llamada resistencia de Chua que consta de tres tramos lineales.

Se muestran las tensiones en los dos condensadores como las coordenadas x e y del osciloscopio en un experimento en laboratorio. El Voltaje es el parametro de control.

## 4 Indicadores de Caos

Exponentes de Lyapunov  
Entropía de Kolmogorov  
Espectros de Potencias  
Superficies de Sección de Poincaré

### 4.1 Exponente de Lyapunov. Mapas 1D

grafico de trayectorias que se separan exponencialmente  
*Las distancia entre las trayectorias diverge exponencialmente:*

$$d_t = d_0 e^{\lambda t} \quad (14)$$

$\lambda$ : exponente de Lyapunov  
 $\lambda > 0$  Caos

#### 4.1.1 Determinación de $\lambda$

**Se muestra el diagrama de bifurcacion y el exponente de Lyapunov.**  
En los puntos de bifurcacion el exponente vale exactamente cero.

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots(f(x_0))\dots))}_{n \text{ veces}} \quad (15)$$

$$|f^n(x_n + \varepsilon) - f^n(x_n)| = \varepsilon \exp(n\lambda x_0) \quad (16)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| \quad (17)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| \quad (18)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right| \quad (19)$$

donde se uso la regla de la cadena:

$$\left( \frac{df^n}{dx} \right)_{x_0} = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_{n-1}} \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_{n-2}} \dots \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0}$$

### 4.1.2 Estabilidad en Mapas 1D

## 4.2 Entropía de Kolmogorov

La teoría de Información de Shannon define a la entropía como

$$S = -k \sum_i P(i) \ln [P(i)] \quad (20)$$

$k$  es la constante de Boltzmann y  $P(i)$  la probabilidad de tener al sistema en el estado (ej. población)  $i$ . En la teoría de la información de Shannon  $S$  interpreta como la cantidad de información necesaria para determinar el estado del sistema.

Kolmogorov utiliza como indicador de caos la *pérdida media de información que tiene lugar a medida que este evoluciona en el tiempo*. Para ello realiza una partición del espacio de fases en celdas de tamaño  $\varepsilon^d$ , donde  $d$  es el número de grados de libertad (o dimension) del sistema. Cada trayectoria queda definida, dentro de la precisión impuesta por  $\varepsilon^d$ , consignando la secuencia de celdas en la que se encuentra el sistema a intervalos regulares de tiempo  $\Delta t$ . que se describe el sistema. Luego define

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P(i_0 \dots i_n) \log_2 [P(i_0 \dots i_n)] \quad (21)$$

$K_{n+1} - K_n$  =información adicional necesaria para especificar la siguiente celda a la que llegara la trayectoria cuando se conoce la historia anterior.

$$K = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \Delta t} \sum_{\substack{i_0 \dots i_n \\ \text{en la trayectoria}}} \ln P(i_0 \dots i_n) \ln [P(i_0 \dots i_n)] \quad (22)$$

Para sistemas 1D,

$K = \lambda$  si éste es constante.

$K = 0 \rightarrow$  no hay pérdida de información  $\rightarrow$  trayectoria **regular**.

$K > 0 \rightarrow$  hay pérdida de información  $\rightarrow$  trayectoria **caótica**.

## 4.3 Espectro de Potencias

Análisis de Fourier:

Serie temporal:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Transformada de Fourier (discreta):  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$

$$\hat{x}_k = \hat{x} \left( \frac{k}{n \Delta t} \right) = \frac{1}{\sqrt{n \Delta t}} \sum_{j=1}^n x_j \exp \left( -i \frac{2\pi j k}{n} \right) \quad (23)$$

**Espectro de Potencia:** se llama así a la representación de  $\hat{x}_k^2$  vs.  $v_k = \frac{k}{n\Delta t}$ .  
Graficos ejemplos para el mapa logístico:

- un mapa con (**r=3.2**) tiene un período 2 lleva a un espectro de potencias con una línea o frecuencia  $v_k = 0.5 = 1/2$ .
- una serie temporal (**r=3.5**) con período **cuatro** da lugar a un espectro con dos líneas en  $0.25=1/4$  y otra  $0.5=1/2$ .
- una serie temporal (**r=3.9**) completamente irregular o “caótica” da lugar a un espectro de frecuencias sucio pero muy denso.