

Temas metamágicos

Los atractores extraños son configuraciones matemáticas en equilibrio entre orden y caos

Douglas R. Hofstadter

Hace algunos meses, recorriendo en compañía de un amigo los pasillos del departamento de física de la Universidad de Chicago, me saltó a la vista el cartel anunciador de un simposio internacional sobre "Atractores extraños". Tan insólito título no pudo dejar de atraerme y extrañarme, y por ello inquirí de mi amigo mayores detalles. Según me explicó, se trataba de un tema candente en la física teórica de nuestros días. A juzgar por sus explicaciones, el tema prometía ser tan atractivo como misterioso.

Saqué la impresión de que la noción clave residía en los que pudiéramos llamar bucles de realimentación matemática: expresiones cuyas "salidas" pueden reinyectarse como nuevas "entradas", de igual forma que los sonidos emitidos por un altavoz pueden captarse por un micrófono, reprocesarse y volverse a emitir. Según parecía, incluso el más sencillo de tales bucles podía generar tanto pautas regulares y estables como organizaciones caóticas (¡admitiendo que la idea de organización caótica no sea auto-contradictoria!). Que sucediera de una u otra forma dependía del valor de un único parámetro. Pequeñas variaciones de tal valor podían provocar las disparidades más extremas en el comportamiento del sistema realimentado. La idea de ver al orden derretirse y fundirse en caos, de ver la regularidad progresivamente disolverse en la aleatoriedad, me resultaba apasionante.

Más todavía. Al parecer, acababan de salir a la luz ciertos rasgos "universales" e inesperados, típicos de la transición del orden al caos; rasgos que tan sólo dependían de la existencia de retroalimentación y virtualmente insensibles a otros aspectos del sistema. Tan gran generalidad es de la mayor importancia, porque disponiendo de modelos matemáticos capaces de mostrar gradualmente la aparición de comportamientos caóticos tal vez podamos percibir las nociones clave para comprender cómo y por qué se originan turbulen-

cias en todo tipo de sistemas físicos. En oposición a casi todos los fenómenos que hasta ahora comprendemos mejor y más profundamente, las turbulencias son fenómenos no-lineales. Lo que significa que al sumar dos soluciones de las ecuaciones que las rigen no es forzoso que resulte una nueva solución. La comprensión de la matemática no lineal va muy por detrás de las teorías lineales; por esta causa, los físicos han venido careciendo de buenas descripciones matemáticas de la turbulencia. De lograrlas, su importancia sería fundamental.

Más tarde, cuando empecé a leer sobre estos temas, descubrí que en realidad se habían desarrollado simultáneamente a partir de muchas disciplinas. En matemática pura se habían empezado a estudiar procesos de iteración en sistemas no lineales, con auxilio de ordenadores. En meteorología teórica y en genética de poblaciones, por no mencionar campos de la física tan distantes como las teorías de fluidos, los láseres y las órbitas planetarias, se había llegado —cada cual por su propio sendero— hasta modelos matemáticos semejantes, todos ellos no lineales, caracterizados por contener bucles de realimentación, y con ellos, la semilla del caos. Cada grupo, independientemente, había estudiado sus propiedades y descubierto aspectos singulares que habían escapado a la atención de los demás. Por otra parte, no sólo los teóricos, sino también los experimentalistas de estas disciplinas, en principio tan desconectadas, habían observado fenómenos caóticos que compartían ciertas pautas de organización básica. Pronto pude ver que la simplicidad de las ideas subyacentes les confería una elegancia que, a mi juicio, rivalizaba con la de algunas de las nociones más logradas de la matemática clásica. Y, en efecto, ciertas partes de este trabajo exhalan un aroma clásico, refrescante y concreto, que será bienvenido en nuestros días, tan agobiados de abstracciones.

Es probable que la causa principal de que se exploren estas ideas precisamente ahora sea la modernidad misma del método de su descubrimiento. Es una especie de matemática experimental, donde el ordenador digital hace el papel de la nave de Magallanes, del telescopio del astrónomo, o de los aceleradores de partículas de los físicos. Al igual que las naves, telescopios y aceleradores han tenido que ir haciéndose constantemente mayores, más potentes y costosos, para poder calar en regiones cada vez más recónditas de la naturaleza, también irán haciendo falta ordenadores de tamaño, rapidez y precisión siempre crecientes para explorar regiones más y más alejadas en el espacio matemático. Por lo mismo, al igual que hubo una edad de oro de la náutica en la exploración terrestre, de la telescopía en astronomía, o de los aceleradores en la física de partículas —edad caracterizada por un pico en la gráfica de descubrimientos nuevos en función de la inversión requerida—, también podríamos esperar que con el estudio de los modelos de caos se produjera una edad de oro de la matemática experimental. Puede que tal edad haya pasado ya, o quizá, que esté en pleno desarrollo en este momento. Y tal vez seamos testigos después de una repentina fiebre de trabajos teóricos, encaminados a fundamentar y organizar estos descubrimientos experimentales.

Sea como fuere, se está desarrollando una rama de la matemática tan curiosa como amena. Esta forma de creación matemática aporta a la inteligencia una variada imaginación y poderosas intuiciones. Al poder cortocircuitar el estilo matemático tradicional —teorema, demostración, teorema, demostración— gracias a la potencia de cálculo de los ordenadores, es posible llegar rápidamente a observaciones y descubrimientos que, reforzándose mutuamente, pueden formar un entramado de ideas tan rico y coherente que, a la larga, resulte más fácil atinar con las necesarias demostraciones, pues se dispondrá ya de un "atlas" minucioso del territorio conceptual analizado. Uno de los más decididos partidarios de esta forma de matematización ha sido Stanislaw M. Ulam, quien, siendo los ordenadores todavía adolescentes, los lanzó sobre problemas de iteración no lineales, además de trastear con ellos en otras muchas regiones de la matemática. Muchas de las ideas esbozadas aquí son consecuencia de los trabajos de roturación que Ulam y Paul Stein realizaron conjuntamente.

Y basta ya de historias edificantes.

Para remontarnos hasta el concepto de atractor extraño conviene examinar antes la noción de atractor. Toda la teoría de atractores se inspira en la iteración de funciones de variable real, vale decir, en el estudio del comportamiento de sucesiones $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$, siendo f alguna función interesante. El valor inicial de x será llamado "semilla". La idea consiste en reinyectar la salida de f , utilizándola una y otra vez como nuevo valor de entrada, con la intención de observar si se presenta alguna regularidad.

He aquí un problema interesante y no demasiado difícil concerniente a la iteración de funciones. ¿Se podrá inventar una función p con la propiedad de que para todo valor de x , $p(x)$ sea también un valor real, y se cumpla $p(p(x)) = -x$? Si el problema no es trivial, ello se debe justamente a la condición de que $p(x)$ haya de tomar valores reales, pues si no, bastaría que $p(x)$ fuera ix (siendo i raíz cuadrada de -1) para tener una solución sencilla. De hecho, podemos pensar incluso que el problema consiste en buscar alguna "raíz del signo menos". Otro problema afín consiste en hallar una función real q tal que $q(q(x)) = 1/x$ para todo valor de x distinto de cero. Observemos que cualesquiera que sean las funciones solución p y q que se den, su iteración genera ciclos de longitud cuatro.

Con mayor generalidad, ¿cuáles son los tipos de funciones para los que podemos esperar se manifiesten comportamientos cíclicos o cuasi-cíclicos al so-

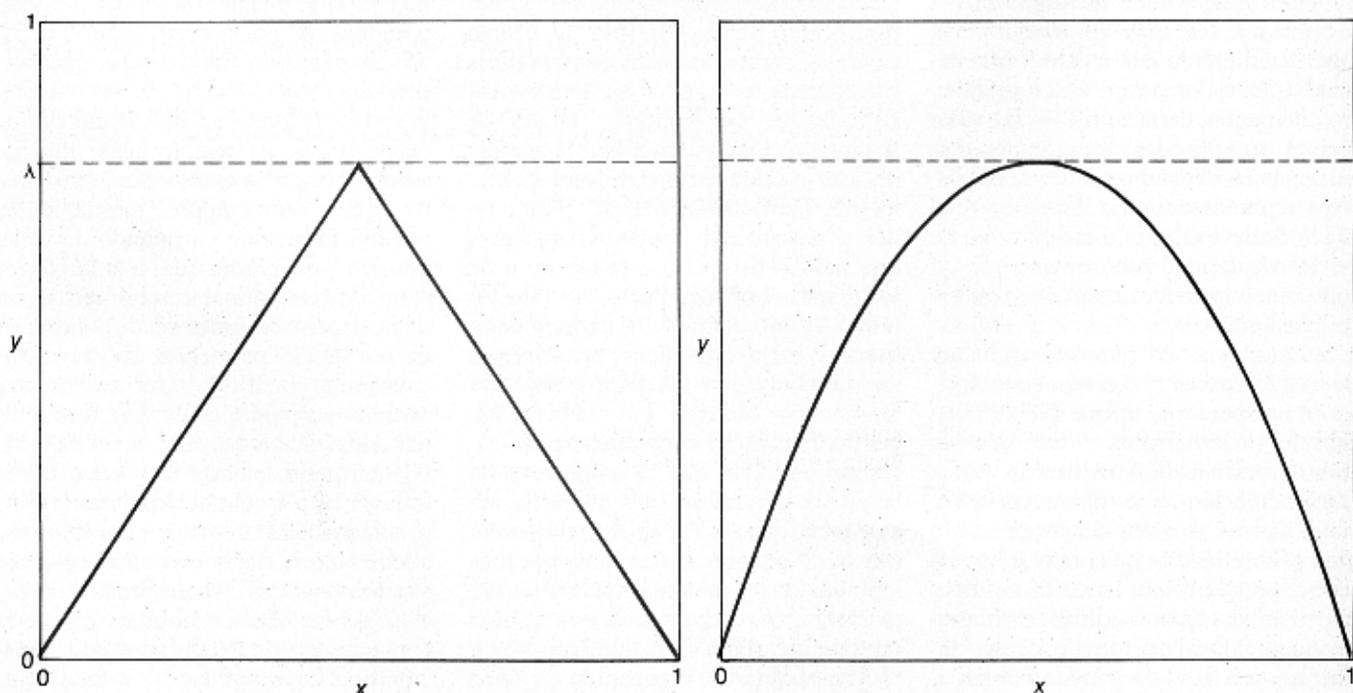
meterlas a iteración indefinidamente? Las funciones más sencillas, como $3x$ o x^3 , no se comportan así. La n -ésima iteración de $3x$, por ejemplo, nos dará $3 \times 3 \times 3 \dots \times 3 \times x$, donde el coeficiente repite n veces la cifra 3, es decir, $3^n x$; la n -ésima iteración de x^3 es sencillamente $((x^3)^3)^3 \dots^3$, o sea, x^{3^n} , pues el exponente 3 figura n veces consecutivas. No vemos aquí rasgos cíclicos. Por ejemplo, en la primera función, si la semilla es positiva, los valores iterados crecen indefinidamente. Para invertir esta tendencia al ascenso, haría falta que la función mostrase alguna clase de vuelta atrás, que su gráfica refleje algún zigzag u oscilación. Con terminología más técnica: las funciones a utilizar no deben ser monótonas; las gráficas de nuestras funciones deben presentar gibas o pliegues; pueden comenzar, por ejemplo, ascendiendo y más tarde curvarse hacia abajo y descender.

En la figura de la parte izquierda de esta misma página tenemos un diente de sierra, cuya cúspide es una afilada punta, y en la figura de la derecha, un arco de parábola, suavemente curvado. Cada una de estas líneas parte del origen, llega a alcanzar una altura máxima, que llamamos λ , y después desciende, aterrizando en el otro extremo del intervalo. Es evidente que existe una infinidad no numerable de curvas de distintas formas que; tras alcanzar una altura máxima λ , descienden nuevamente a 0, pero seguramente estas dos se encuentren entre las más sencillas. Y de ambas, quizá sea la parábola la más

sugestiva desde el punto de vista matemático. Su ecuación es $y = 4\lambda x(1-x)$, donde λ representa un parámetro comprendido entre 0 y 1.

Tan sólo admitiremos entradas (es decir, valores de x) comprendidos entre 0 y 1. Como muestra el gráfico, para todo x contenido en ese intervalo, la salida y se encuentra siempre entre 0 y 1. Por consiguiente, el valor de salida puede ser reinyectado como valor de entrada en la función, asegurando de esta forma la posibilidad de iteración indefinida. Al iterar repetidamente funciones "jorobadas" como ésta, los sucesivos valores de y que van obteniéndose crecen unas veces, y otras decrecen, oscilando siempre entre 0 y λ . Como veremos, es precisamente la comba de la gráfica la causante de los curiosos efectos de la iteración.

Resulta que las espectaculares diferencias en el grado de regularidad de las configuraciones iterativas ya mencionadas se deben a variaciones en el ajuste del que podríamos llamar "control λ ". De acuerdo con los valores en que se sitúe este mando, la función genera una increíble variedad de "órbitas", es decir, de sucesiones $x, f(x), f(f(x)), \dots$, etcétera. En particular, cuando λ es inferior a un cierto valor crítico ($\lambda_c = 0,892486417967\dots$) todas las órbitas trazan pautas regulares (aunque el grado de regularidad sea muy variable; por lo común, cuanto menor es λ tanto más sencilla es la regularidad de la órbita), pero cuando λ alcanza o rebasa este valor crítico, ¡agárrense al sombrero!

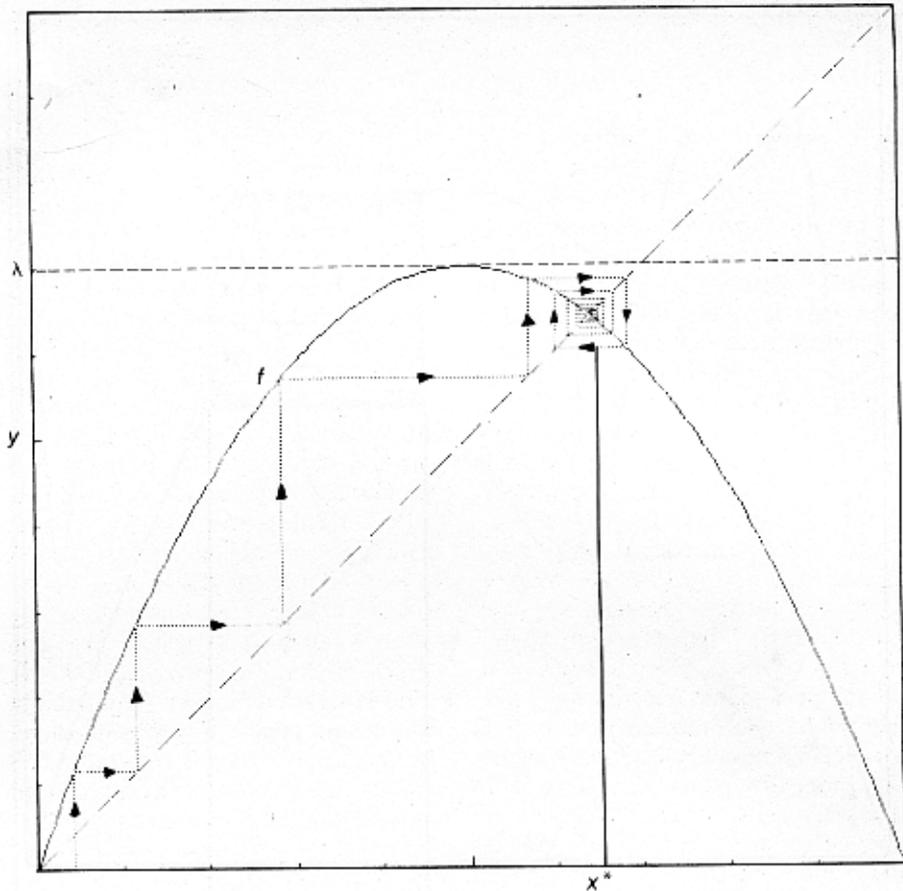


Entre las funciones "combadas" las hay de gráfica angulosa (izquierda), o suave, como la parábola (derecha)

La sucesión de valores $x, f(x), f(f(x)), \dots$ irá oscilando de forma esencialmente caótica, independientemente de la semilla x (de valor entre 0 y 1) que decidamos sembrar. En el caso de las parábolas, parece ser que el primero en comprender el papel crítico del mando de control λ fue P. J. Myrberg, a principios de los años 60, pero su trabajo apareció en una oscura revista y pasó desapercibido. Unos 10 años después, Nicholas C. Metropolis, Paul Stein y Myron Stein redescubrieron el importante papel desempeñado por λ , no sólo en las parábolas, sino también en muchas otras funciones. En realidad, la esencia de su descubrimiento es que en tanto se cumplan ciertas condiciones topológicas, la función particular carece de interés —tan sólo son importantes los valores de λ . Este hecho ha sido bautizado como “propiedad de universalidad estructural”.

Para comprender esa dependencia tan poco intuitiva del comportamiento de la sucesión de salida respecto del valor del parámetro, es preciso formarse una imagen visual del proceso de iteración de $f(x)$. Ello se logra fácilmente. Supongamos ajustado el control de λ a 0,7. Podemos ver la gráfica de $f(x)$ en la ilustración de la derecha. Vemos también en línea de trazos la recta $y = x$, bisectriz del primer cuadrante. (Esta gráfica, así como la mayoría de las reproducidas en el artículo, han sido obtenidas en un pequeño ordenador por Mitchell J. Feigenbaum, de Los Alamos National Laboratory.)

Fijémonos en los dos valores de x donde se cortan la recta y el arco de parábola. Se encuentran en $x = 0$ y también en $x = 9/14 \approx 0,643$. Denotemos por x^* al valor no nulo. Por construcción, $f(x^*) = x^*$; la iteración indefinida de f en este valor de x nos hace entrar en un bucle infinito. Lo mismo sucede al empezar la iteración en $x = 0$. Empero, hay una importante diferencia entre estos dos “puntos fijos” de f . Podemos verlo más claramente tomando algún otro valor inicial de x , por ejemplo, algún valor próximo a 0,04, como muestra la ilustración. Llamemos x_0 a este valor inicial de x . Podemos engendrar la órbita de una semilla x_0 cualquiera mediante una elegante construcción geométrica. Una recta vertical trazada por la abscisa de valor x_0 alcanzará la curva a la altura $y_0 = f(x_0)$. Para iterar $f(x)$ debemos trazar una nueva recta vertical que pase por un valor de x igual al valor y_0 de y . Aquí es donde la bisectriz $y = x$ del primer cuadrante muestra su utilidad. Situados como estamos a la altura y_0 nos desplazamos



Situando el “control λ ” en 0,7, la función $f(x)$ genera esta gráfica

horizontalmente hasta interceptar la recta. Puesto que, a lo largo de ella, y es igual a x , tanto x como y serán en el punto de intersección iguales a y_0 . Llamemos x_1 al nuevo valor de x . Trazamos ahora una segunda vertical que pase por x_1 ; esta recta cortará a la curva a la altura en que $y_1 = f(x_1) = f(y_0) = f(f(x_0))$. Repetimos luego el proceso.

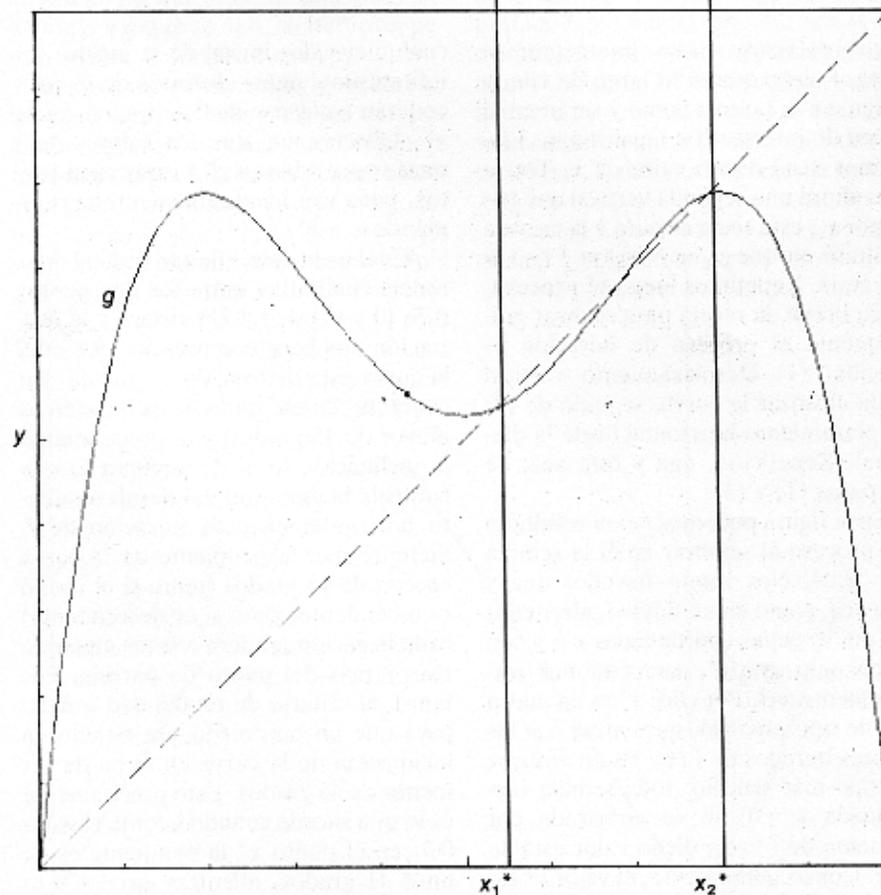
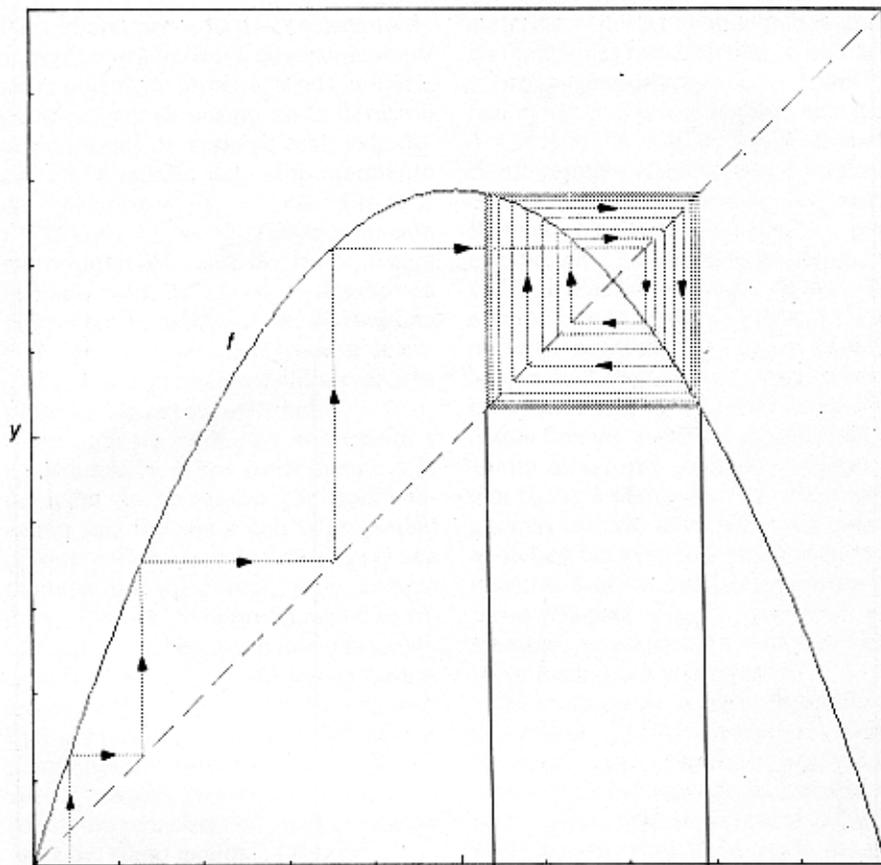
En breve, la receta para realizar gráficamente el proceso de iteración es sencilla: (1) Desplazamiento vertical hasta alcanzar la curva, seguido de (2) desplazamiento horizontal hasta la diagonal. Repetición, una y otra vez, de los pasos (1) y (2).

En la figura podemos ver el resultado del proceso al sembrar en él la semilla $x_0 = 0,04$. Nos vemos llevados una y otra vez, como en un tiovivo, alrededor del punto cuyas coordenadas x e y son ambas iguales a x^* , acercándonos gradualmente a él. Por ello, x^* es un punto fijo de tipo especial, pues atrae a sí los valores iterados de $f(x)$. Es un *atractor* del tipo más sencillo: toda semilla (exceptuada $x = 0$) se ve arrastrada por iteración de f hacia dicho valor estable de x . Consecuentemente, el valor x^* recibe el nombre de punto fijo estable. En cambio, el otro punto fijo, 0, es repelente, o inestable, pues la órbita de

cualquier valor inicial de x , incluso los infinitesimalmente distintos de 0, procederán a alejarse de 0 y dirigirse hacia x^* . Observemos que los valores de f unas veces rebasan x^* y otras caen cortos, pero van inexorablemente aproximándose a x^* .

¿Cuál es la causa de tan radical diferencia cualitativa entre los dos puntos fijos (0 y x^*) de f ? Un vistazo a la ilustración nos hace comprender que en 0 la curva está demasiado empinada. En concreto, en ese punto la inclinación es mayor de 45 grados; y es precisamente la inclinación local de la curva lo que controla la amplitud del desplazamiento horizontal en cada iteración de f . Siempre que la pendiente de la curva exceda de 45 grados (tanto si el tramo es ascendente como si es descendente) cada iteración tenderá a irnos alejando más y más del punto de partida. Por tanto, el criterio de estabilidad señala: para que un punto fijo sea estable, la inclinación de la curva en él ha de ser menor de 45 grados. Esto precisamente es lo que sucede cuando λ toma el valor 0,7: en el punto x^* la pendiente es de unos 41 grados, mientras en $x = 0$ es mucho mayor de 45 grados.

¿Qué sucederá al aumentar λ ? El emplazamiento de x^* (que por defini-



Arriba: una espiral convergente a un 2-ciclo estable.
Abajo vemos los elementos x_1^* y x_2^* que definen el ciclo

ción es la abscisa del punto donde se cortan la curva f y la bisectriz $y = x$ del primer cuadrante) cambiará y , al mismo tiempo, aumentará también la *pendiente* de f en el punto x^* . Cuando λ valga $3/4$, esta pendiente alcanzará el ángulo de 45 grados. ¿Qué ocurrirá entonces? Llamemos Λ_1 a este valor particular del parámetro λ . Para hacernos idea de lo que podemos esperar echemos un vistazo a una figura construida para un valor ligeramente mayor, $\lambda = 0,785$ [véase la ilustración de la izquierda].

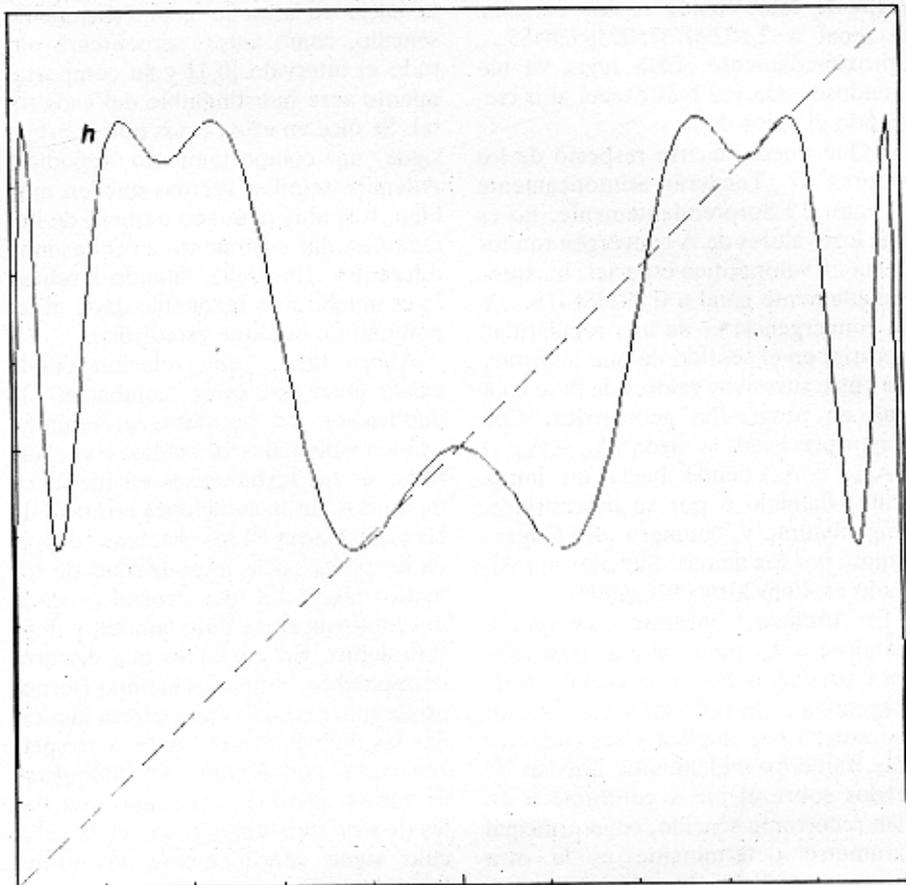
Tomemos al azar una semilla, por ejemplo, $0,04$, como antes. En la mitad superior de la ilustración podemos ver la órbita resultante. Observamos en ella algo muy curioso. Al principio los valores de x van dirigiéndose a la vecindad de x^* (que sigue siendo punto fijo de f , aunque ahora inestable), pero después el proceso de iteración va describiendo una espiral cada vez algo más amplia, que tiende suavemente a estabilizarse en una especie de baile cuadrangular convergente hacia dos valores especiales, x_1^* y x_2^* . Esta oscilación tan elegante se llama un 2-ciclo, y el par de valores que lo definen (x_1^* y x_2^*) siguen formando un sistema atractor (o más brevemente, un atractor), que ahora tiene período dos. Con este término queremos sugerir que nuestro 2-ciclo es estable: es capaz de atraer hacia sí valores muy alejados de x por iteración de f . La órbita de toda semilla positiva (exceptuado el punto fijo x^*) terminará ejecutando esta misma danza, es decir, se aproximará asintóticamente al 2-ciclo perfecto compuesto por los puntos x_1^* y x_2^* , si bien nunca lo alcanzará exactamente. Empero, desde un enfoque físico, la aproximación llega pronto a ser tan grande que podemos admitir sin inconveniente que las órbitas han quedado "atrapadas" por el atractor.

Para mejor comprender lo que sucede, resultará muy esclarecedor echar un vistazo a la gráfica de una nueva función generada a partir de la dada, a saber, $g(x) = f(f(x))$, que podemos ver en la parte inferior de la ilustración. Este camello de dos jorobas es la *iterada* de f . Ante todo, fijémonos en que todo punto fijo de f es también punto fijo de g ; por tanto, 0 y x^* serán puntos fijos de g . Pero, en segundo lugar, observemos que como $f(x_1^*)$ es igual a x_2^* , y que $f(x_2^*)$ es igual a x_1^* , resulta que g tiene dos nuevos puntos fijos: $g(x_1^*) = x_1^*$ y $g(x_2^*) = x_2^*$. Hallar gráficamente x_1^* y x_2^* es cosa fácil: son las abscisas de los puntos donde la bisectriz intercepta a la gráfica de $g(x)$.

Hay cuatro puntos de intersección; los otros dos son 0 y x^* . Como hemos visto, el criterio de estabilidad frente a iteración de los puntos fijos es que la pendiente de la curva en estos puntos es menor de 45 grados. Ahora estamos interesados en los puntos fijos de g y, por consiguiente, en la pendiente de g y no en la de f . En la misma ilustración vemos claramente que en 0 y en x^* la pendiente de g es mayor de 45 grados, mientras que tanto en x_1^* como en x_2^* es menor. Más todavía, no sólo es la inclinación en ambos puntos menor que 45 grados, sino que, y vale la pena destacarlo, las pendientes son iguales ("esclavas" una de otra, se dice a veces), como es fácil comprobar calculando la derivada en estos puntos.

Acabamos de ver que un atractor de período 1 puede convertirse en un atractor de período 2 al traspasar λ un cierto valor umbral ($\lambda = 3/4$). Precisamente para este valor el punto x^* se escinde en dos valores oscilantes, x_1^* y x_2^* . Es obvio que en su "nacimiento" estos valores coinciden, pero conforme λ aumenta van separándose y alejándose más y más. El aumento de valor de λ es también causa de que la pendiente de g en sus dos puntos fijos estables vaya creciendo progresivamente, hasta que al fin la función g —como ya le sucediera a su progenitora, la función f —llegará a su punto de ruptura (cuando su pendiente en los puntos x_1^* y x_2^* rebasa los 45 grados) y cada uno de sus puntos de atracción se parta en otros dos, generando así su propio 2-ciclo local. (Debe quedar claro que los nuevos ciclos tan sólo son 2-ciclos con respecto a g ; con respecto a f los nuevos puntos son elementos de un atractor de período cuatro. ¡No deben confundirse los papeles del f y g !) Estas dos escisiones se producirán exactamente en el mismo instante (es decir, para un mismo ajuste del control de λ), pues los valores de la pendiente de g en x_1^* y x_2^* son cada uno esclavo de otro. Esta especial posición del mando λ será llamada Λ_2 ; su valor es 0,86237...

Y en este punto, como en los chistes malos, vemos ya por donde van los tiros. Sin duda, el lector intuye que para una cierta posición Λ_3 los cuatro puntos del atractor de f se fisurarán simultáneamente, produciendo un atractor periódico constituido por ocho puntos, y que a partir de ahí esta conducta irá repitiéndose una y otra vez, duplicándose y reduplicándose los puntos del atractor cada vez que se alcanzan y rebasan ciertos valores umbrales de λ . Si tal ha sido su conjetura, está usted enteramente en lo cierto, y la razón subyacen-



Para $\lambda = 0,87$, la gráfica de $h(x)$ aún tiene más gibas que $g(x)$

te es siempre la misma: las pendientes (idénticas) de todos los puntos fijos estables de cierta iterada de f alcanzan el ángulo crítico de 45 grados. En el caso de la primera fisión (para $\lambda = \Lambda_1$) se trataba de la pendiente de la propia f en el único punto x^* . La siguiente fisión se debió a que las pendientes de g en sus dos puntos fijos estables x_1^* y x_2^* alcanzaron ambas simultáneamente los 45 grados. Análogamente Λ_3 es aquel valor de λ para el cual la pendiente de $h(x) = f(f(f(f(x))))$ llega simultáneamente a 45 grados en los cuatro puntos fijos estables de h , y así sucesivamente. La ilustración superior muestra el escabroso aspecto de $h(x)$ para un valor de λ aproximadamente igual a 0,87.

En la ilustración de la página siguiente vemos la localización sobre el eje x de los puntos fijos estables de f correspondientes a los valores Λ_1 a Λ_6 (para este último hay 32, algunos tan apiñados que es imposible distinguirlos a esta escala de dibujo). El trazado corresponde al preciso momento en que los valores fijos se hacen inestables, siendo cada uno a modo de una célula cuya división fuera inminente. Observemos la nítida pauta de la distribución de los puntos atractores. Basta un momento

para apreciar que cada línea puede deducirse de la anterior por un esquema geométrico recursivo, en el cual cada punto se sustituye por dos "gemelos" situados bajo él. Cada condensación local de puntos se ajusta a un modelo que reproduce la pauta de la organización global precedente, aunque a escala más reducida (y en los cúmulos locales consecutivos, intercambiándose sus lados derecho e izquierdo). Por ejemplo, en la línea más baja hemos recuadrado en color un cúmulo de ocho puntos. Observemos que este grupo de puntos es como una miniatura de la configuración global dibujada dos líneas más arriba.

El descubrimiento de esta regularidad recursiva, que Mitchell J. Feigenbaum logró con el auxilio de una pequeña computadora, ha sido uno de los principales pasos dados en este campo. En particular, establece que para formar la $n + 1$ -ésima línea a partir de n -ésima basta hacer que cada punto de la línea n -ésima dé a luz dos "gemelos". La nueva generación de puntos debiera quedar unas 2,5 veces más densamente empaquetada de lo que estaba la generación precedente. Enunciado con más precisión, la distancia entre los nuevos gemelos deberá ser α veces menor que la distancia entre su generador y el ge-

melo de éste, siendo α una constante igual a 2,5029078750958928485..., aproximadamente. Esta regla va haciéndose cada vez más exacta al ir creciendo el valor de n .

¿Qué puede decirse respecto de los valores Λ ? ¿Tenderán asintóticamente al valor 1? Sorprendentemente, no es así. Los valores de Λ convergen raudos hacia un valor crítico especial, λ_c , aproximadamente igual a 0,892486418... Y su convergencia es de una regularidad notoria, en el sentido de que la distancia entre sucesivos valores de Λ se contrae en progresión geométrica. Con mayor precisión, la razón $(\Lambda_n - \Lambda_{n-1}) / (\Lambda_{n+1} - \Lambda_n)$ tiende hacia un límite finito, llamado δ por su descubridor, Feigenbaum, y "número de Feigenbaum" por los demás. Su valor aproximado es 4,669201660910299097...

En resumen, conforme λ va aproximándose a λ_c , para valores especiales de λ predichos por la constante δ de Feigenbaum, la población del atractor asociado a f se duplica y sus cada vez más numerosos elementos quedan situados sobre el eje x conforme a un plan recurrente sencillo, cuyo principal parámetro determinante es la otra constante de Feigenbaum, α .

Y después, para λ mayor que λ_c —en el llamado régimen caótico— puede suceder que ciertos valores de las semillas generen, por iteración de f , órbitas no convergentes hacia sistemas atractores con número finito de puntos. Estas órbitas se llaman aperiódicas. Para la mayoría de las semillas, la órbita continúa siendo periódica; empero, su período resultará muy difícil de detectar, ante todo, porque será superlativamente grande, y en segundo lugar, porque la órbita será muchísimo más compleja que antes. Una órbita periódica de este tipo, en lugar de converger rápidamente

hacia un atractor geoméricamente sencillo, como antes, serpenteará por todo el intervalo $[0,1]$ y su comportamiento será indistinguible del caos total. Se dice en estos casos que la órbita sigue un comportamiento ergódico. Además, semillas vecinas pueden muy bien, tras muy pequeño número de iteraciones, dar nacimiento a órbitas muy diferentes. En breve, cuando λ rebasa λ_c es mucho más razonable darle al fenómeno un enfoque estadístico.

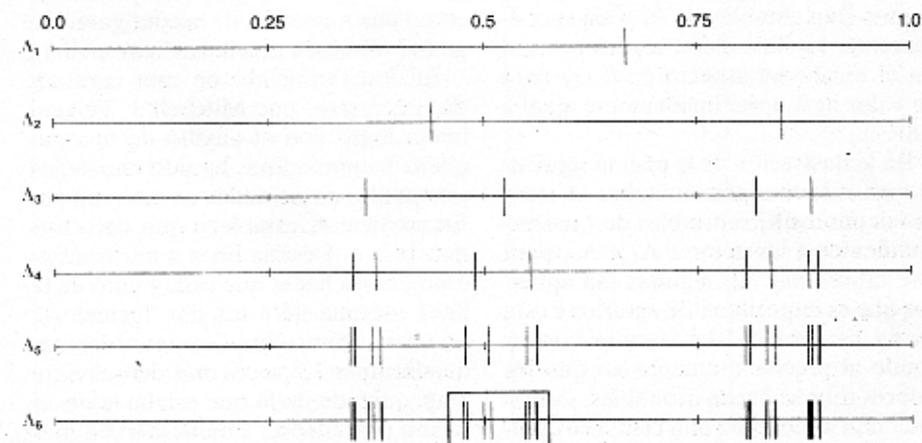
Ahora bien, ¿qué relación puede existir entre funciones "combadas", la duplicación de períodos, el régimen caótico y nociones asociadas, con el estudio de las turbulencias en mecánica de fluidos, las fluctuaciones erráticas de las poblaciones en los sistemas "depredador-presa" o la inestabilidad de los modos láser? La idea central procede del contraste entre flujo laminar y flujo turbulento. En un fluido que discurre mansamente, el flujo es laminar (término de suave sonido que expresa que todas las moléculas del fluido se desplazan como automóviles por autopistas de varios carriles). Los rasgos esenciales de este flujo son (1), que cada vehículo sigue sensiblemente la misma trayectoria que su antecesor, y (2), que dos vehículos cercanos, tanto si se encuentran en el mismo carril como si corren por carriles paralelos, irán lentamente separándose uno de otro al transcurrir el tiempo, en proporción sustancialmente idéntica a la diferencia de sus velocidades, es decir, linealmente. También las moléculas de un fluido en régimen laminar comparten estos rasgos; en su caso, los carriles de flujo son las llamadas líneas o láminas de corriente.

En cambio, cuando un fluido se ve desgarrado por alguna fuerza exterior, tal apacible comportamiento se torna

en turbulento, como vemos al romper las olas en la playa, o al echarle al café un chorro de leche. Hasta la propia voz "turbulento" tiene un sonido mucho más áspero que la dulce "laminar". No podemos ya seguir pensando en el tráfico por autopista. Las líneas de corriente se separan unas de otras y se enmudejan en las más complejas formas. En tales sistemas hay remolinos y revesas, y vórtices y torbellinos de muy distintos órdenes de magnitud, todos presentándose simultáneamente; por ello, dos puntos que un instante antes se encontraban muy cercanos pueden ahora hallarse en regiones totalmente distintas del fluido. La aparición de trayectorias en rápida divergencia caracteriza al flujo turbulento. La distancia entre dos puntos puede muy bien crecer exponencialmente —en vez de proporcionalmente— en función del tiempo; el coeficiente de que vaya afectado el tiempo en el exponente es el llamado número de Lyapunov. Al hablar de caos del flujo turbulento estamos refiriéndonos a esa rápida e impredecible separación de elementos vecinos. Y tal comportamiento es notablemente similar al de la rápida separación de dos órbitas (para valores de λ en el régimen caótico) cuyas semillas estuvieran inicialmente muy cercanas.

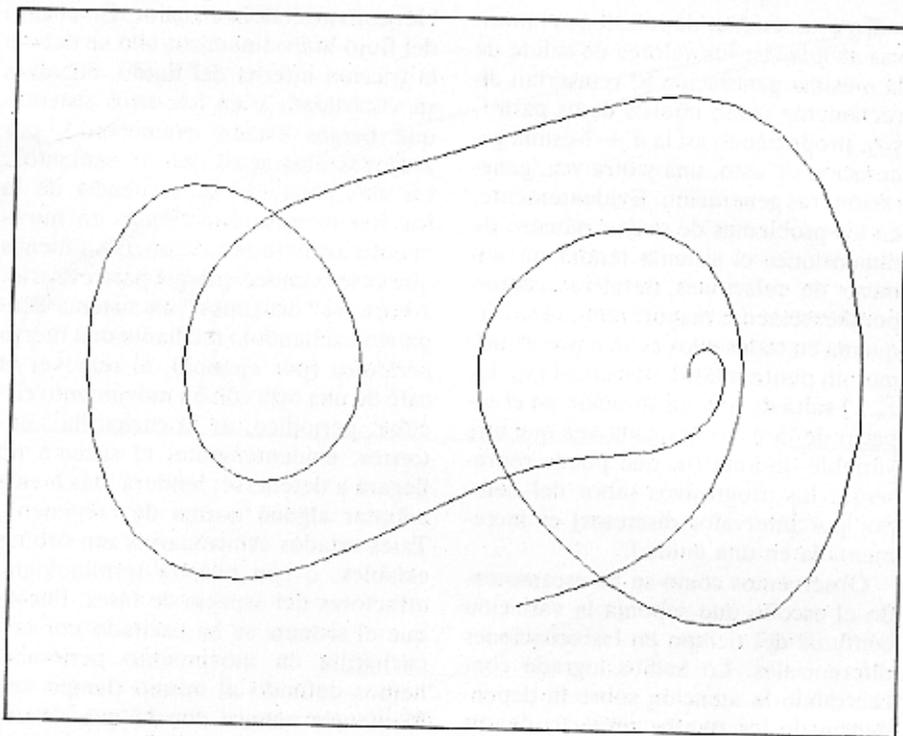
Lo cual sugiere que el escenario (así se le llama), que provoca que órbitas periódicas de bonito aspecto vayan progresivamente dando lugar a las embrolladas y caóticas órbitas de nuestra función parabólica, pudiera, por qué no, ser idéntico al escenario implícito en la transición al estado turbulento en fluidos y otros sistemas. Empero, aclarar cómo pueda establecerse la conexión entre ambos requiere explicitar con algún detalle su contexto. En particular, deberemos examinar brevemente la construcción de modelos matemáticos que describan la evolución espacio-temporal de un fluido o de algún otro sistema, como puedan ser la densidad de una población o la masa monetaria.

Hasta ahora, los modelos matemáticos que mejor describen este tipo de fenómenos se valen de ecuaciones diferenciales. En las ecuaciones diferenciales se establecen relaciones entre las tasas instantáneas de variación continua de ciertas magnitudes y los valores que en iguales instantes toman éstas y otras magnitudes que afectan al fenómeno. Además, cuando en ellas interviene el tiempo, se supone que discurre sin discontinuidades, regularmente, no como hacen los relojes eléctricos modernos, que saltan bruscamente de una cifra a otra. Una forma de visualizar las pautas



Los atractores estables se hacen inestables y "se fisionan" para una serie de valores del "mando Λ " (de arriba abajo)

definidas por ecuaciones diferenciales es imaginar un espacio multidimensional—que en ciertos problemas puede tener miles de dimensiones, o sólo dos o tres en otros— donde un punto va describiendo continuamente una curva. En cualquier instante, el movimiento del punto contiene toda la información relativa al estado del sistema físico; sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas nos dan los valores de todas las magnitudes que determinan unívocamente el estado del sistema. Como es evidente, tal espacio—que se llama espacio de fases—habría de tener un enorme número de dimensiones para que uno solo de los puntos de la curva pudiera resumir la forma de una ola rompiendo en la playa. Por otra parte, en un sistema depredador-presa bastan sólo dos dimensiones: una variable, x por ejemplo, que exprese la población depredadora, y otra, y , que mida la población depredada.



Una curva generada por la ecuación de Duffing que remeda la sombra de la trayectoria de una mosca

Con el transcurrir del tiempo x e y van evolucionando, determinándose recíprocamente. Por ejemplo, si la población de depredadores es grande, disminuirá el número de posibles presas, mientras que una pequeña población de presas será incapaz de sustentar a un número grande de depredadores. En un sistema así, x e y definen un punto (x, y) que gira y valsea suavemente, describiendo una órbita continua sobre el plano. (El término "órbita" tiene ahora un sentido diferente al expuesto hasta aquí, donde las órbitas eran sucesiones de puntos individuales obtenidos por iteración de una función parabólica.) En la ilustración superior de esta página vemos una posible órbita del nuevo tipo; ha sido generada a partir de una ecuación diferencial conocida por ecuación de Duffing. Su aspecto recuerda el revoloteo de una mosca por la habitación, o mejor, la *sombra* que sobre una pared produciría la trayectoria de la mosca. En efecto, esta curva del plano es la sombra de una trayectoria tridimensional. La curva plana se corta varias veces a sí misma; la tridimensional, no. En el espacio de fases, la trayectoria del punto que describe el estado de un sistema no podrá jamás cortarse a sí misma. Ello es debido a que tal punto lleva codificadas en sus coordenadas toda la información sobre la evolución del sistema, incluida la futura, y por ello no pueden existir dos sendas que partan de uno y un mismo punto.

sa, podríamos imaginar que z representa una influencia externa de variación periódica, como puede ser el azimut solar o el espesor de la nieve. Me tomaré ahora la licencia de hacer entrar en la escena de presas y depredadores a mi molesta mosca. Imaginemos una gran sala en la que la mosca vuela *periódicamente* de pared a pared. Supongamos que la mosca tarde un año en cruzar la habitación y retornar (se trata de una mosca tardona). Al volar la mosca de pared a pared, la sombra proyectada sobre una de ellas describe la curva que vemos en la ilustración superior. Si se diera el azar de que la mosca retornase a un punto de la sala por donde hubiera pasado en un viaje anterior, por el carácter periódico de su recorrido la mosca se vería condenada a realizar un bucle cerrado, siguiendo indefinidamente, una y otra vez, el camino que describió. Espero que con esto el lector se habrá hecho idea de cómo pueden ser las órbitas trazadas por un punto del espacio de fases que representa los posibles estados de un sistema dinámico regido por ecuaciones diferenciales.

Supongamos ahora que sea necesario establecer alguna clase de conexión entre estos sistemas y las órbitas *discretas*. ¿Cómo lograrlo? Bueno, no es preciso observar en cada instante los valores de x , y y z . Podríamos también ir tomando muestras periódicamente, con cierta frecuencia natural. En el caso de pobla-

ciones animales, el año terrestre puede ser un valor muy natural del período. El azimut solar sigue la más estricta de las leyes periódicas, y la climatología de cada lugar se *esfuerza* en repetirse año tras año. Hay por tanto una sucesión natural de puntos aislados (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) ... destacables, a razón de uno por año. Es como si un estroboscopio—una lámpara de destellos—fuese relampagueando regularmente, "congelando" el vuelo de la mosca en ocasiones anuales especiales (¿por qué no en la última campanada de la noche de San Silvestre?). En todo otro momento, sus peregrinaciones por la sala permanecen invisibles. La ilustración de la página siguiente muestra una sucesión de puntos aislados, situados sobre la sombra de la trayectoria de la mosca, marcada con números que expresan cuándo fueron observados. Gradualmente, con el transcurrir de muchos "años", llegarán a acumularse suficientes puntos individuales como para empezar a formar una organización, de estructura reconocible por sí misma. Esta configuración de puntos es una "órbita" discreta, fuertemente relacionada con las órbitas discretas generadas por iteración en la parábola $f(x)$. En el caso parabólico teníamos una relación de iteración (o recurrencia) unidimensional muy sencilla: $x_{n+1} = f(x_n)$. La relación de recurrencia es bidimensional: $x_{n+1} = f_1(x_n, y_n)$ $y_{n+1} = f_2(x_n, y_n)$.

En este sistema de relaciones iterativas *acopladas*, los valores de salida de la n -ésima generación se reinsertan directamente como nuevos datos para f_1 y f_2 , produciendo así la $n + 1$ -ésima generación. Y esto, una y otra vez, generación tras generación. Evidentemente, en los problemas de mayor número de dimensiones el sistema tendrá un número de relaciones iterativas correspondientemente mayor; empero, el esquema en todos ellos es siempre el mismo: un punto multidimensional (x_n, y_n, z_n, \dots) salta de una localización en el espacio de fases a otra cada vez que una variable discreta (n , que puede representar los progresivos saltos del tiempo, por intervalos discretos) es incrementada en una unidad.

Observemos cómo se ha escamoteado el escollo que suponía la variación continua del tiempo en las ecuaciones diferenciales. Lo hemos logrado concentrando la atención sobre la dependencia de los puntos respecto de sus predecesores de la "cosecha" anterior. Aunque, ¿habrá en todo sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas un "período natural" que deba separar cada par de observaciones sucesivas? No siempre lo hay. Empero, en ciertas situaciones sí lo hay, y se da el caso de que así sucede siempre que se presentan fenómenos de turbulencia.

¿Y por qué razón? Todos los sistemas turbulentos son *disipativos*, lo que significa que disipan o degradan la energía de más "calidad", más utiliza-

ble, convirtiéndola en calor. En el caso del flujo hidrodinámico, ello se debe a la fricción interna del fluido, debida a su viscosidad, y en los otros sistemas que hemos estado examinando, por análogos abstractos del "rozamiento". La más conocida consecuencia de la fricción es que todo objeto en movimiento acabará por detenerse a menos que se le bombee energía para evitarlo. Ahora, si "dirigimos" un sistema disipativo excitándolo mediante una fuerza *periódica* (por ejemplo, al remover el café de una taza con un movimiento circular, periódico, de la cucharilla), entonces, evidentemente, el sistema no llegará a detenerse; tenderá más bien a adoptar alguna norma de "régimen". Tales estados estacionarios son órbitas estables, o con nuestra terminología, atractores del espacio de fases. Puesto que el sistema se ha excitado por una cucharilla en movimiento periódico, hemos definido al mismo tiempo una frecuencia natural con la que deberá destellar nuestro estroboscopio para "congelar" el estado del sistema, a saber, cada vez que la cucharilla pase en su revolución por cierta marca fija de la taza, el asa, por ejemplo. Así tendremos definido el "año" del sistema. De esta forma, la evolución continua puede sustituirse por una sucesión de instantáneas, siempre que estemos operando con un sistema disipativo excitado por una fuerza periódica. Y también así podremos sustituir las órbitas continuas por órbitas discretas, con lo que la

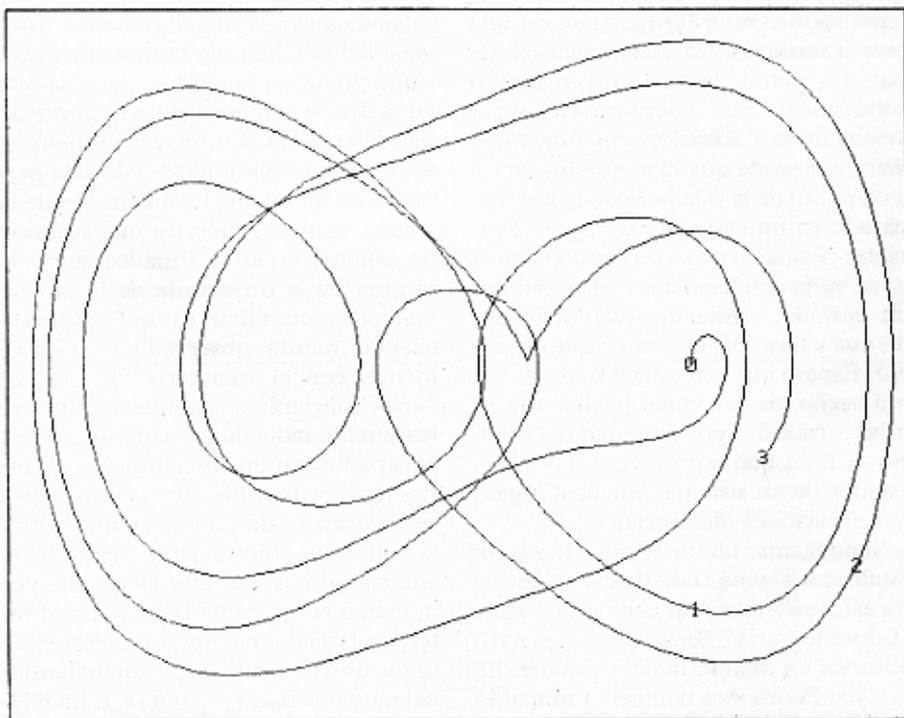
iteración recupera su papel y retorna a escena.

Cuando la fuerza excitadora no tenga carácter periódico (por ejemplo, podría ser constante) hay todavía posibilidad de definir un período natural en tanto alguna variable del sistema oscile regularmente entre valores extremos. Bastaría que el "flash" destellase cuando tal variable alcanzara uno de sus valores extremos; la mosca seguiría así observándose en instantes discretos. Este tipo de representaciones discretas del movimiento de una partícula en espacios multidimensionales se llaman representaciones de Poincaré.

Todo este planteamiento carece de rigor, y malamente podrá convencer a ningún matemático, pero nos trae el aroma de la esencia del problema: estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales mediante relaciones iterativas acopladas. Y este paso trascendente nos orienta hacia los recientes descubrimientos sobre la parábola.

En 1975, Feigenbaum descubrió que sus números α y δ no dependían en realidad de la forma concreta que tuviera la curva definida por $f(x)$. Casi todas las curvas lisas convexas que alcancen su cima en el mismo punto que la parábola servirán perfectamente. Inspirado en la propiedad de universalidad estructural descubierta por Metropolis, Stein y Stein, Feigenbaum se sirvió de curvas sinusoidales, viendo atónito que reaparecían los mismos valores numéricos, hasta muchas cifras decimales, de los números que habían caracterizado la duplicación de períodos y el umbral del régimen caótico en la iteración de la parábola. Al igual que entonces, hay para las curvas sinusoidales un parámetro de altura, λ , y un conjunto de valores especiales de λ que convergen hacia un punto crítico, λ_c . Además, el umbral del régimen caótico, λ_c , está gobernado por los mismos números α y δ . Feigenbaum comenzó a sospechar que allí estaba ocurriendo algo de carácter universal. Dicho de otra forma, empezó a intuir que más importante que la propia f era el mero hecho de la iteración reiterada de f . Más aún, Feigenbaum conjeturó que tal vez f no tuviera influencia ninguna sobre el instante de aparición del caos.

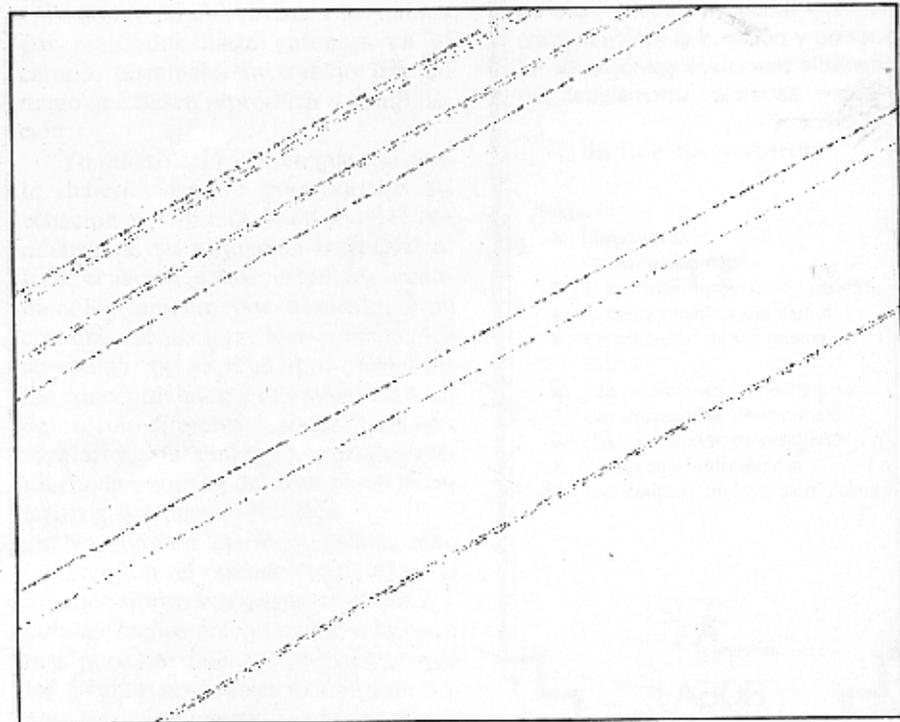
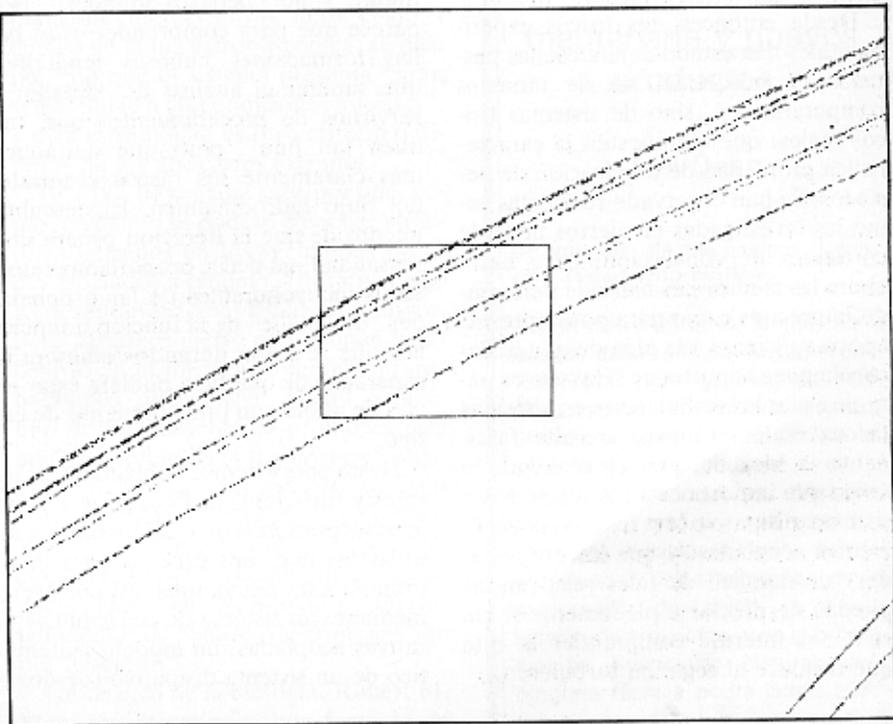
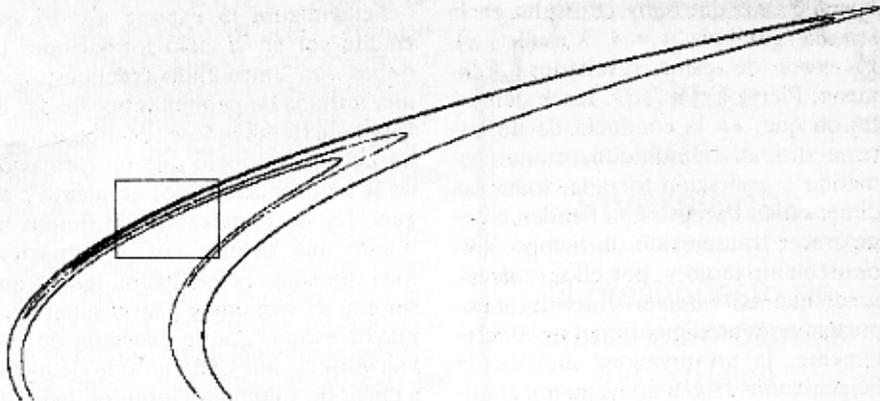
Evidentemente, las cosas no son tan sencillas. Feigenbaum descubrió pronto que lo realmente importante de f era la naturaleza de la cima situada en su centro. A largo plazo, el comportamiento de las órbitas depende tan sólo de un arco infinitesimal de la cresta de la gráfica y, en último extremo, únicamente de las propiedades de la curva en



Los números de la curva indican la posición de la mosca a intervalos regulares

el preciso punto donde alcanza su máximo. La forma que tenga el resto de la gráfica, incluso en la región cercana al pico, carece de importancia. Las parábolas tienen máximos de un tipo llamado "cuadrático"; también son cuadráticos los máximos de circunferencias, elipses y sinusoides. En realidad, la conducta que pueda mostrar en sus máximos locales una curva lisa tomada más o menos al azar será, de no darse coincidencias especiales, de tipo cuadrático. Por ello, el caso parabólico, más bien que curiosa excepción, parece ser quien da la regla. Este descubrimiento empírico de Feigenbaum, donde aparecen dos coeficientes escalares fundamentales α y δ , que caracterizan la formación del caos tras ir pasando por una sucesión de atractores, cada uno de período doble al de su predecesor, es manifestación de una propiedad universal de nuevo cuño, conocida como universalidad métrica, para distinguirla de la universalidad estructural anteriormente conocida. La validez del principio de universalidad métrica ha sido demostrada (en el sentido matemático) para el caso unidimensional por Oscar E. Lanford III.

El descubrimiento de que las constantes de Feigenbaum no sólo se presentaban en atildados sistemas matemáticos, sino también en sistemas físicos donde se manifestaban embrollados fenómenos de turbulencia, fue todo un acontecimiento. Valter Franceschini, de la Universidad de Modena, Italia, adaptó la ecuación de Navier-Stokes (por la cual se rigen todos los flujos hidrodinámicos) para su simulación computarizada. A tal fin la transformó en un sistema de cinco ecuaciones diferenciales acopladas cuyas representaciones de Poincaré pudiera él estudiar después numéricamente con su ordenador. Descubrió primero que el sistema mostraba atractores cuyos períodos iban duplicándose conforme sus parámetros se acercaban a los valores donde se esperaba que surgiera el régimen turbulento. Desconocedor del trabajo de Feigenbaum, Franceschini mostró sus resultados a Jean-Pierre Eckmann, de la Universidad de Ginebra, quien inmediatamente le urgió para que retornase y determinase la razón de convergencia de los valores λ a los cuales se producía la duplicación de los períodos. Para asombro de ambos, aparecieron los valores α y δ de Feigenbaum con precisión de cuatro decimales, surgidos, diríase, de la nada. Por vez primera, un modelo matemático preciso de una turbulencia física reveló que su estructura estaba íntimamente relacionada con el



El atractor de Hénon, ampliado por dos veces, revela su infinita finura de detalle

humilde caos que subyace oculto en la sencilla parábola $y = 4 \lambda x (1 - x)$. En vista de estos resultados, Eckmann, Pierre Collet y H. Koch demostraron que, en la conducta de un sistema disipativo multidimensional sometido a excitación forzada, todas las dimensiones excepto una tienden a desaparecer transcurrido un tiempo suficientemente largo y, por ello, *es de esperar* que las características del comportamiento unidimensional —y concretamente, la universalidad métrica de Feigenbaum— hagan nuevamente aparición.

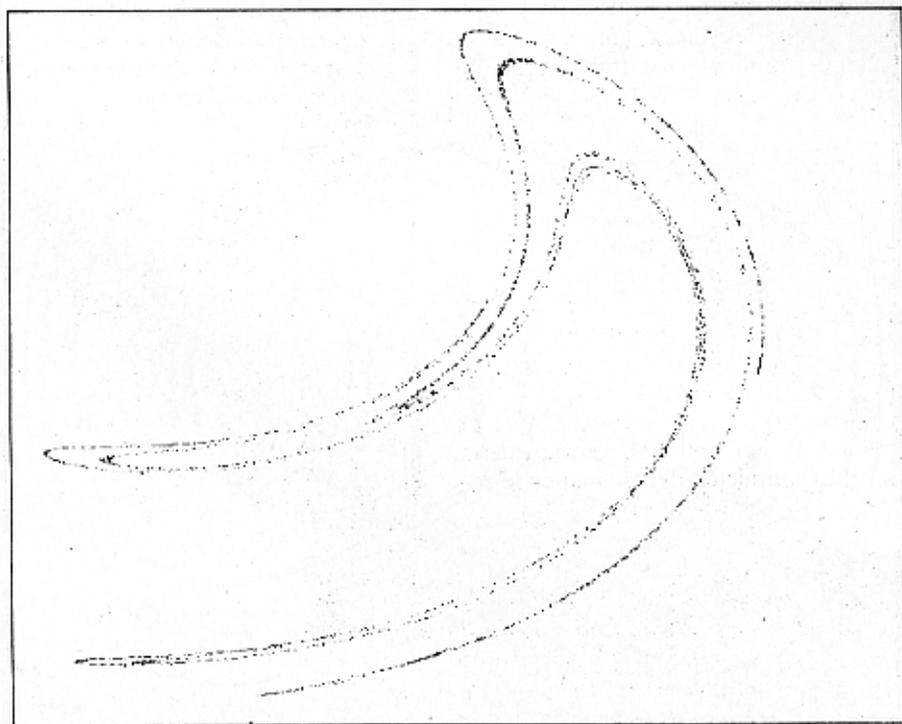
Desde entonces, los físicos experimentales han estado dejándose las pestañas en búsqueda, no de modelos computarizados, sino de sistemas físicos reales, que manifiesten la característica propiedad de duplicación de períodos. Se han observado conductas como las investigadas en ciertos tipos de corrientes de convección, pero hasta ahora las mediciones han sido demasiado imprecisas como para poder prestar apoyo suficiente a la idea de que la parábola pueda aportar en sí las claves para desvelar las turbulencias en sistemas físicos reales. Empero, resulta fascinante la idea de que, en realidad, lo único que importa es la iteración de un sistema disipativo de relaciones recurrentes acopladas, y que las propiedades “de detalle” de tales recurrencias puedan despreciarse plenamente si tan sólo nos interesa comprender la ruta que conduce al régimen turbulento.

Feigenbaum lo expone así: es frecuente ver en el cielo formaciones de nubes —un entretejido compuesto por una miríada de pequeñas bocanadas de vapor— extendiéndose de horizonte a horizonte. Es obvio que tal formación no se ha producido “por accidente”; alguna ley de la mecánica de fluidos ha tenido que determinar la formación. Mas, prosigue Feigenbaum, tendrá que ser una ley que opere a nivel superior, a mayor escala, que la ecuación de Navier-Stokes, pues ésta ha sido deducida a partir de volúmenes infinitesimales de fluido, y no “pedazos grandes”. Nos parece que para comprender estas bellas formaciones nubosas tendremos que superar el análisis de “detalle” y servirnos de procedimientos que “no hilen tan fino”, pero que destaquen más claramente los rasgos esenciales del flujo hidrodinámico. El descubrimiento de que la iteración genera universalidad —es decir, proporciona resultados independientes de las propiedades “de detalle” de la función o funciones que se están iterando— alumbra la esperanza de que bien pudiera estar en vías de aflorar un procedimiento de ese tipo.

Hasta ahora hemos hablado de atractores y turbulencias. Pero ¿qué son los atractores extraños? Disponemos ya de todas las nociones precisas para comprender esta nueva idea. Al construir, mediante un sistema de ecuaciones iterativas acopladas, un modelo matemático de un sistema disipativo (de dos o

más dimensiones) sometido a excitación periódica, el conjunto de puntos captados por los sucesivos destellos de la lámpara estroboscópica va describiendo una forma o figura, que desempeña en este sistema el mismo papel que una de las órbitas sencillas de la parábola. Ahora bien, al operar en espacios de dimensión mayor que uno, se enriquece el abanico de posibilidades. Es posible tener un punto fijo estable: un atractor de período 1. En tal caso, al cabo del tiempo, para todos los destellos de la lámpara el punto que representa el estado del sistema se encontrará en el mismo lugar donde estuvo la última vez. También es posible tener un atractor *periódico*; de ser así, tras cierto número finito de destellos el punto habrá retornado a alguna de sus posiciones anteriores; la situación es análoga a la de los 2-ciclos, 4-ciclos, etcétera.

Pero cabe una nueva posibilidad: que el punto nunca retorne a una posición precedente del espacio de fases; los sucesivos relámpagos muestran que va saltando erráticamente en el seno de una región acotada del espacio de fases. Al cabo del tiempo, esta región podría empezar a tomar forma ante los ojos del observador, al proseguir el estroboscopio su periódico centelleo. En casi todos los casos hasta ahora observados, se ha podido apreciar un fenómeno sumamente inesperado: el punto errático va creando una delicada filigrana, que recuerda “los desvanecidos y fantásticos trazados de la helada en el cristal”. Su delicada trama es de un tipo bastante especial, pariente cercana de las curvas “fractales” descritas por Benoit Mandelbrot en su libro *Fractals: Form, Chance and Dimension* [véase la sección “Juegos matemáticos” en INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, febrero de 1977]. En particular, cualquier región del atractor, al ser ampliada, revela que su conformación es tan delicada como la de la imagen “ambiente” de la que se tomó. Es decir, hay una retrogradación infinita en el detalle, un interminable encaje de estructura en el seno de la estructura. Una de las primeras en descubrirse fue la llamada estructura de Hénon, que se reproduce en la página precedente. Está generada por la sucesión de puntos (x_n, y_n) definidos por las relaciones de recurrencia $x_{n+1} = y_n - ax_n^2 - 1$ e $y_{n+1} = bx_n$. En nuestro ejemplo, a es igual a $7/5$ y b vale $3/10$; los valores de las semillas son $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. El pequeño rectángulo de la ilustración superior se ha ampliado para mejor apreciar su detalle y, de ésta, se ha vuelto a ampliar otro



Un atractor extraño generado por la ecuación de Duffing

pequeño rectángulo en busca de más detalle. La configuración recuerda una autopista de tres carriles paralelos, cada uno de los cuales, al ser ampliado, se descompone en una nueva autopista, y así indefinidamente. Cada sección transversal perpendicular de esta autopista producirá uno de los llamados conjuntos de Cantor, que se construyen por un método recursivo ya clásico, que explicamos a continuación.

Se comienza por un intervalo cerrado $[0, 1]$, por ejemplo. (El intervalo $[0, 1]$ está formado por todos los números comprendidos entre 0 y 1. "Cerrado" significa que también sus extremos 0 y 1 pertenecen a él.) Ahora eliminamos un cierto subintervalo abierto central. Como el subintervalo abierto no incluye a sus puntos extremos, estos dos puntos permanecerán en el conjunto de Cantor que estamos construyendo. Por lo común, el subintervalo suprimido es el tercio central ($1/3, 2/3$), pero ello no es obligatorio. Hemos dejado dos subintervalos cerrados. Sometámoslos al mismo tratamiento, a saber, eliminar un subintervalo abierto central de cada uno de ellos. Repitamos el proceso ad infinitum. Al cabo quedaremos con una frágil estructura formada por una infinidad de puntos esparcidos a lo largo del segmento de partida $[0, 1]$, como cuentas de rocío enfiladas en un hilo de araña. Empero, el conjunto de Cantor es infinito y no numerable; su densidad dependerá del procedimiento de supresión iterativa de intervalos que se haya utilizado. Tal es la complejidad de los conjuntos cantorianos; y cuando las secciones transversales de un atractor presentan distribuciones tan insólitas como éstas se dice que el atractor es extraño, ¡y con motivo!

Otro hermoso atractor extraño está generado por los puntos "estroboscópicos" 0, 1, 2, ... de la ilustración de la página 110. Como esta configuración procede de la ecuación de Duffing, se la conoce por atractor de Duffing; podemos verla a escala ligeramente ampliada en la ilustración de la página opuesta. Notemos su gran semejanza con el atractor de Hénon. Tal vez la universalidad vuelve a mostrar aquí su rostro.

Es interesante que para la parábola, en el valor crítico λ_c , el atractor de f se haga aperiódico, y pase a estar formado por infinidad de puntos. (Después de todo, es culminación de una sucesión infinita de duplicaciones del período.) Además, la disposición de esta infinidad no numerable de puntos del intervalo $[0, 1]$ se ha construido mediante la regla recursiva de Feigenbaum, con

ayuda de su constante α , como ya hemos visto en una ilustración precedente. No cuesta mucho aceptar que por esa razón este atractor concreto sea él mismo un conjunto de Cantor. ¡La fértil parábola nos ha proporcionado también un ejemplo de atractor extraño *unidimensional*!

En el régimen caótico correspondiente a casos más generales, de dimensión k mayor que 1, la predicción a largo plazo del camino que irá tomando un punto es completamente imposible. Dos puntos que ahora están casi en contacto se encontrarán en lugares sumamente alejados tras unos cuantos guiños de la luz estroboscópica; se dice por ello que el sistema presenta "gran sensibilidad a las condiciones iniciales", y esta sensibilidad es otro criterio definidor de los atractores extraños.

Hoy por hoy, nadie sabe por qué, cómo, o cuándo se podrán cosechar atractores extraños en los regímenes caóticos asociados a esquemas iterativos que representan sistemas físicos disipativos, pero sí parece cierto que ocupan lugar central en el misterioso fenómeno que llamamos turbulencia. David Ruelle, uno de los pioneros en promover este nuevo enfoque de la turbulencia, escribió: "Estos sistemas de curvas, estas nubes de puntos, evocan a veces galaxias y fuegos de artificio, y otras, floraciones, tan insólitas como tranquilizadoras. Hay todo un mundo de formas pendientes de análisis, de armonías aún por descubrir."

Un teórico de la biología, Robert M. May, en un artículo, hoy famoso, de 1976 donde pasaba revista a los hallazgos realizados hasta entonces en el campo, terminaba su trabajo con un ruego que deseo reproducir a continuación:

"Yo quiero... insistir en que a la gente debería siempre presentársele [la ecuación $y = 4\lambda x(1-x)$] muy al comienzo de su formación matemática. Esta ecuación puede estudiarse fenomenológicamente por iteración, bien con una calculadora, bien a mano. En su estudio no se requieren elementos tan conceptualmente elevados como los del cálculo diferencial, siquiera sea elemental y, sin embargo, enriquecería mucho la intuición del alumno en lo relativo a sistemas no-lineales.

"No sólo en la investigación, sino también en el mundo ordinario —el mundo político y económico— todos nos defenderíamos mucho mejor si hubiera más personas que comprendieran que los sistemas no-lineales sencillos no tienen por qué poseer necesariamente propiedades dinámicas sencillas."