la amplitud y la frecuencia de esa fuerza: ello significa que la solución no se puede expresar como suma de funciones periódicas, y no se puede predecir. Este ejemplo tiene un interés doble: por un lado muestra cómo un pequeño cambio en una ecuación ya conocida puede modificar espectacularmente el comportamiento del sistema. Por otra parte no es puramente académico, pues se usa para modelar el comportamiento de una unión de Josephson sometida a radiación de microondas. Curiosamente hay observaciones experimentales de un ruido de fondo que se piensa que podría ser la manifestación de ese caos.

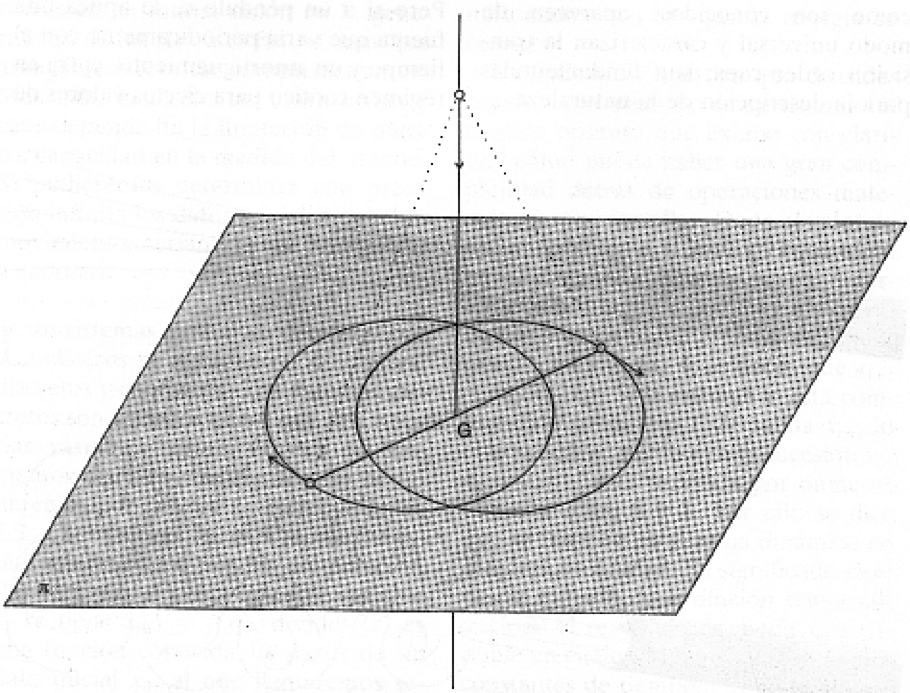
En la naturaleza son muchos los sistemas que oscilan. Pensemos en la suspensión de un automóvil, en el acoplo entre la precesión y la nutación del eje de la Tierra o en las vibraciones moleculares. Cuando son varias las coordenadas que oscilan y las fuerzas están dadas por funciones no lineales aparecen en general movimientos caóticos sin pauta regular si la energía de oscilación es alta.

Podríamos multiplicar los ejemplos, muchos de los cuales están empezando a estudiarse ahora, de manera especial en mecánica celeste, dinámica de poblaciones y meteorología. Quienes elaboran los informes sobre el estado del tiempo, el oleaje en el mar y pronósticos afines, son víctimas frecuentes del caos. Si se equivocan a veces no es por incompetencia, sino porque el movimiento de la atmósfera no es regular sino turbulento: pequeñas imprecisiones en los datos de las estaciones meteorológicas o, más importante aún, falta de datos ante un número insuficiente de ellas pueden hacer que resulte imposible la predicción más allá de algunas horas. Por ello, la meteorología impulsa hoy la construcción de superordenadores para, mediante métodos numéricos de extrema complejidad, conseguir prolongar el tiempo de predicción segura. El llamado efecto mariposa, propuesto por E. Lorenz, describe de modo hiperbólico el problema: Un meteorólogo que consiguiera llegar a una determinación totalmente precisa del estado de la atmósfera en un cierto momento y resolver las complicadas ecuaciones que rigen su movimiento vería invalidado su trabajo por la pequeñísima perturbación producida por el imprevisto batir de las alas de una mariposa. Tomada al pie de la letra, esta afirmación es exagerada, pero ilustra, de modo muy expresivo, la raíz de la dificultad: la sensibilidad extrema a pequeños cambios.

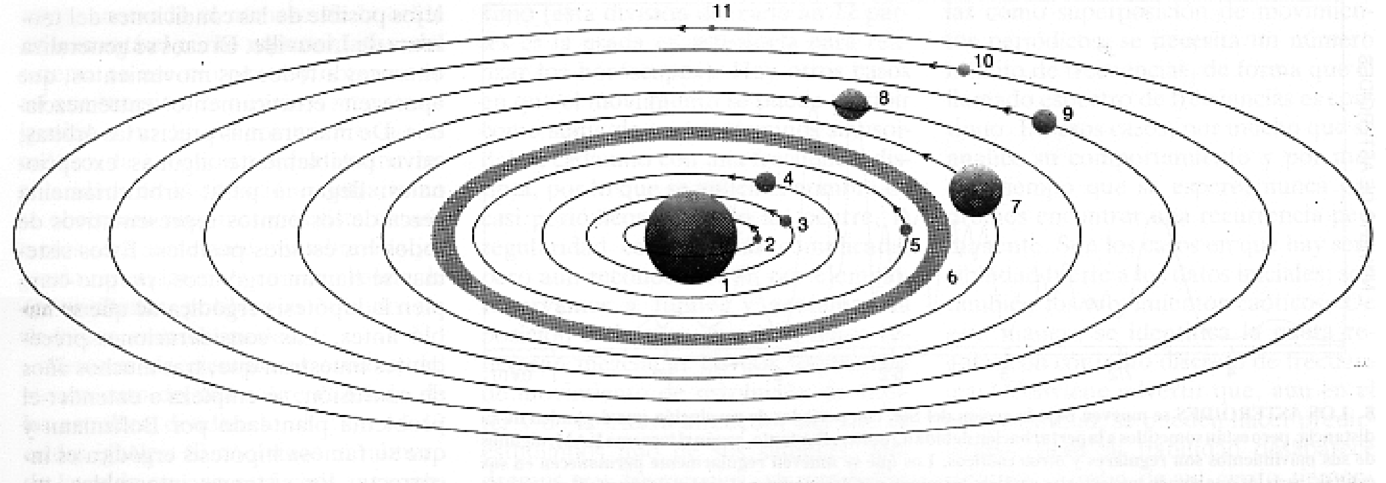
El problema fundamental en el estudio del movimiento de un sistema es la solución de sus ecuaciones, que expresan la evolución temporal de las n coordenadas y los n momentos (o, equivalentemente, de las n coordenadas y las n velocidades) de dicho sistema. Esos $2n$ valores representan un punto en el llamado espacio de las fases que tiene $2n$ dimensiones. Al avanzar el tiempo, ese punto se mueve describiendo una curva, por lo que se puede expresar la solución del problema como una familia de órbitas o trayectorias en dicho espacio de las fases. Por recordar el conjunto de líneas de corriente de un fluido, se habla del flujo asociado a las ecuaciones del movimiento, pudiéndose así emplear métodos geométricos de fácil intuición.

Para obtener esa solución es preciso hallar las $2n$ funciones que representan la variación en el tiempo de las n coordenadas y las n velocidades. Y para lograrlo es preciso reducir las ecuaciones diferenciales a integrales de funciones conocidas, lo que en la jerga usual se denomina reducirlas a cuadraturas, cosa que es imposible en general, en contra de una idea muy extendida. Cuando sí se puede hacer, se dice que el sistema es integrable y ocurre entonces que su comportamiento es regular y predecible. Cuando no, el sistema se llama no integrable y tiene sensiblidad fuerte a los datos iniciales y comportamiento caótico. El significado físico de la integrabilidad reside así en la posibilidad de obtener fórmulas analíticas que expresan la evolución del sistema en función del tiempo, para cualquier valor de éste. En el caso no integrable, esto no siempre es posible, pues las soluciones que expresan muchos de sus movimientos dejan de ser válidas al cabo de un tiempo, mayor o menor, pero finito. Debe insistirse, sin embargo, en que, aunque un sistema no integrable tiene siempre movimientos caóticos, no todos lo son en general, por lo que puede exhibir también otros regulares. La no integrabilidad de un sistema es una dificultad que no puede superarse simplemente recurriendo al análisis numérico, ya que la extremada sensibilidad a los errores, inevitables en todo método aproximado, hace muy difícil el cálculo con ordenador para tiempos cortos e imposible para tiempos largos.

Es muy necesario, pues, disponer de



6. SISTEMA formado por tres cuerpos que se atraen gravitatoriamente. No es integrable y tiene movimientos caóticos, como exhibe claramente el ejemplo, estudiado por Sitnikov. Un planeta de masa pequeña (*rojo*) está sometido al campo gravitario de una estrella doble, formada por dos primarias iguales (*azul*) que describen elipses alrededor de su centro de masas G y se mueve perpendicularmente al plano π de las elipses. El planeta oscila y su movimiento está caracterizado por los intervalos de tiempo entre dos cruces sucesivos del plano π. Llamemos a éstos τ_k. Bajo ciertas condiciones poco restrictivas, dada cualquier sucesión de números aleatorios, existe un movimiento cuyos τ_k coinciden con ellos. En otras palabras, hay conjuntos de soluciones asociadas a sucesiones infinitas de números al azar. El papel destacado que el orden y lo regular desempeñan en nuestra ciencia se debe, en buena medida, a que vivimos girando en torno a un Sol simple. Pues, como los valores de τ_k son lo análogo al período de nuestros planetas, un Kepler, miembro de una civilización situada en una órbita alrededor de una estrella en un sistema doble, se habría visto obligado a abandonar su propósito de encontrar leyes regulares para el movimiento de un sistema solar.



1 SOL 2 MERCURIO 3 VENUS 4 LA TIERRA 5 MARTE 6 ASTEROIDES 7 JUPITER 8 SATURNO 9 URANO 10 NEPTUNO 11 PLUTON

7. ESTABILIDAD DEL SISTEMA SOLAR. Como la masa de los planetas es unas mil veces menor que la del Sol, en una primera aproximación se puede despreciar el movimiento de éste y las fuerzas entre aquéllos. Se obtiene así un sistema integrable, con todos sus movimientos regulares, en los que cada planeta describe una elipse kepleriana. Pero, al tener en cuenta las interacciones entre los planetas, el problema deja de ser integrable y las elipses se modifican, no pudiendo excluirse la posibilidad de que alguno de ellos empiece a aumentar su distancia del Sol y se inicie una órbita caótica que lleve a su expulsión al espacio exterior. A lo largo del siglo XIX, muchos astrónomos se esforzaron en probar que esto no podía suceder y que el sistema solar era estable, pero sin conseguirlo. Incluso el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio a quien aclarase esta cuestión, que fue concedido a Poincaré, por sus grandes contribuciones, a pesar de que no llegaron a dilucidar totalmente el problema. Desde 1954, gracias al teorema KAM, iniciales de Kolmogorov, Arnold y Moser, autores del mismo (y que dice que las perturbaciones pequeñas sólo destruyen parcialmente la regularidad), se piensa que la perturbación introducida por las fuerzas interplanetarias no destruye todas las órbitas regulares; antes bien, debido a la pequeñez de las masas de los planetas frente a la del Sol, la mayoría de los movimientos en los que los planetas siguen órbitas próximas a elipses de Kepler en un cierto intervalo de tiempo continúan así por siempre. Pero no todos, por lo que no se puede probar que el sistema solar esté en un movimiento regular y nunca se expulse un planeta o se produzca una colisión. Ese ha sido el destino de muchos de los miembros menores del sistema. Y así ocurrirá probablemente con Quirón, que se mueve entre Saturno y Urano en una órbita excéntrica inestable.

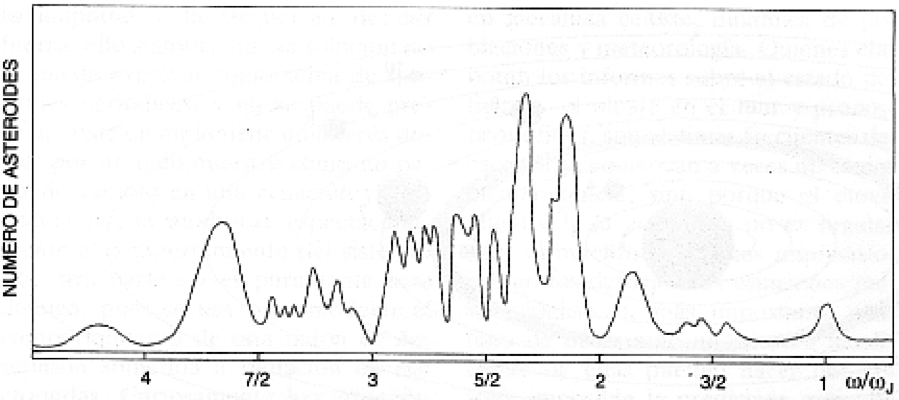
algún criterio que permita determinar si un sistema es integrable o no. Existe un teorema debido al francés Liouville (1855) que cumple precisamente esa misión y cuya importancia se acrecienta un siglo después de ser propuesto. Los sistemas hamiltonianos tienen todos al menos una cantidad conservada, la energía, que se mantiene constante a lo largo del tiempo. El teorema de Liouville afirma que si un sistema de n grados de libertad tiene no sólo una sino n cantidades conservadas independientes (la energía y otras n-1 más), su solución se puede obtener mediante cuadraturas.

Para comprender las implicaciones del teorema de Liouville consideremos algunos ejemplos. Los sistemas de un grado de libertad cumplen sus condiciones, pues tienen una cantidad conservada, la energía, por lo que son todos integrables y no caóticos. Así, toda partícula moviéndose en una dimensión bajo la acción de una fuerza dependiente de su posición lo hace siempre de modo regular. En el caso de 2 grados de libertad, un punto material en un plano por ejemplo, partiendo de que la energía es constante bastará, para que el sistema sea integrable, con que tenga otra variable conservada independiente de la energía. Esto ocurre si la fuerza no depende de la dirección, sino sólo de la distancia, pues entonces se conserva el momento cinético. La famosa ley de las áreas de Kepler (áreas barridas en tiempos iguales son iguales) equivale a la conservación del momento cinético, por lo que garantiza que un planeta sometido a la fuerza del Sol se mueve de modo regular y no caótico en el plano de su órbita.

Pero en el caso de una fuerza **F** cualquiera no existe esa segunda ley de conservación, por lo que el problema del movimiento de un punto en el plano no es integrable en general. No lo es, por ejemplo, si **F** tiene por componentes $F_x = -kxy^2$; $F_y = -kx^2y$ (o, equivalentemente, si el potencial es **V** igual a la mitad de kx^2y^2), donde k es una constante. La inocencia aparente de esta fuerza muestra de nuevo cómo el comportamiento caótico suele ir asociado a formas simples.

En un sistema de n grados de libertad, podemos asegurar que es integrable si encontramos n cantidades conservadas que cumplen las condiciones del teorema de Liouville. Si no las hallamos, no podremos asegurar nada, porque quizás esto se deba a la dificultad del problema o a no haberlas buscado con suficiente habilidad. Pero algunas veces es posible probar que esas magnitudes no existen, por lo que el sistema debe ser caótico. El más famoso de ellos es el de los tres cuerpos que se atraen gravitatoriamente; ya en el siglo XIX, Bruns y Poincaré demostraron que no tiene un número suficiente de cantidades conservadas.

Tras conocer la caracterización de los sistemas integrables dada por el teorema de Liouville, surge de modo natural una pregunta. Admitiendo que existen sistemas no integrables que ofrecen un comportamiento caótico, ¿cuál es la relevancia real de ese fenómeno? En otras palabras, ¿son los sistemas no integrables casos patológicos que no deben afectar al desarrollo de una teoría del movimiento más que como una curiosidad? O, por el contrario, ¿tienen cierta importancia en el mundo físico? ¿Es la integrabilidad la norma o la excepción? Supongamos que un ordenador elige sistemas dinámicos hamiltonianos al azar, para lo que bastaría con generar ecuaciones de movimiento de manera aleatoria, por ejemplo, dando los coeficientes de su desarrollo en serie. Pues bien, en general el sistema así obtenido será no integrable y caótico y sólo de modo excepcional será integrable y regular. Esto es una consecuencia inmediata de dos teoremas de C.L. Siegel, sugeridos en la obra de Poincaré, que se refieren a sistemas dinámicos analíticos, es decir, cuyas funciones de energía son desarrollables en serie; dichos teoremas afirman que, dado un sistema cualquiera, integrable o no, existen infinitos otros no integrables cuyas ecuaciones se diferencian de las del primero



8. LOS ASTEROIDES se mueven bajo la acción del Sol, con períodos de revolución que dependen de su distancia, pero están sometidos a la perturbación debida a Júpiter. Por tanto, según el teorema KAM, algunos de sus movimientos son regulares y otros caóticos. Los que se mueven regularmente permanecen en sus órbitas, pero los que siguen trayectorias caóticas terminan por desaparecer al cabo del tiempo. Hace ya más de 100 años que se sabe que la distribución del número de asteroides en función de su frecuencia de revolución alrededor del Sol presenta ausencias en aquellas cuyo cociente por la de Júpiter es un número racional *m/n*, con *m* y *n* pequeños, que es lo que cabe esperar del teorema citado; pues los que faltan estarían en resonancia con el planeta, cuyo efecto, al cabo de muchos ciclos, acaba por sacarles de su órbita. Algo parecido ocurre con Saturno, donde la perturbación debida a algunos satélites es la causa de los huecos entre los anillos.

tan poco como se quiera, pero que no existen, en general, infinitos sistemas integrables con la misma propiedad. Por tanto, cualquier pequeña modificación de un sistema dotado de comportamiento regular puede introducir caoticidad. De donde se infiere que la integrabilidad y regularidad son excepción, no la norma.

En el caso de sistemas integrables, las trayectorias aparecen ordenadamente en el espacio de las fases de $2n$ dimensiones, ocupando de modo natural superficies de n dimensiones. Cuando hay caos, algunas trayectorias adquieren una forma tan compleja y retorcida que se salen de toda superficie de ese tipo y exploran incluso volúmenes de $2n$ dimensiones. Esto suele ocurrir sólo en algunas regiones, mientras que en otras las trayectorias son regulares. Como nunca podemos eliminar los efectos del resto del universo sobre un sistema, resulta especialmente importante saber lo que ocurre cuando se perturba ligeramente un sistema integrable. El formado por sólo dos cuerpos en interacción gravitatoria lo es, por lo que un ejemplo de lo anterior podría ser el planeta Marte moviéndose bajo la acción del Sol y sometido a la fuerza perturbadora de Júpiter. O también todo el sistema solar, considerando como perturbación al movimiento en elipses de Kepler las fuerzas entre los planetas y los de éstos sobre el Sol, que se pueden despreciar en una primera aproximación. Ninguno de estos dos sistemas es integrable, lo que puede parecer sorprendente por lo arraigada que está en nuestra cultura la idea de la regularidad del sistema solar.

Pero la no integrabilidad implica la existencia de movimientos desordenados y turbulentos, por lo que podría ocurrir que los efectos de las fuerzas entre los planetas, aunque débiles en comparación con las producidas por el Sol, vayan alejándolos poco a poco de sus órbitas keplerianas, iniciando un movimiento caótico que acabe incluso con la expulsión de uno de ellos.

El importante teorema KAM (iniciales de Kolmogorov, que lo propuso en 1954, y de Arnold y Moser, que completaron la prueba pocos años más tarde) aclara este problema. Afirma que, al introducir una perturbación a un sistema integrable cuya intensidad se caracteriza por el parámetro ϵ, aparece caos, pero su extensión e importancia dependen de ϵ. El volumen del espacio de las fases con comportamiento caótico tiende a cero con ϵ y aumenta asimismo con él, por lo que los movimientos regulares y caóticos coexisten, estando incluso arbitrariamente cerca los unos de los otros. En otras palabras, las perturbaciones pequeñas a un sistema integrable introducen turbulencia y caos, pero respetan parte del orden, dependiendo la proporción de cada uno en la intensidad perturbadora. Aplicado al sistema solar, el teorema KAM permite asegurar que hay movimientos regulares, en los que los planetas se mueven en órbitas muy próximas a elipses de Kepler. Pero no se puede asegurar que estemos ahora en uno de ellos [*véase la figura 7*].

Todas estas consideraciones se refieren a sistemas hamiltonianos en los que se conserva la energía. En el caso más extremo, no hay ninguna otra cantidad conservada, por lo que estamos lo más lejos posible de las condiciones del teorema de Liouville. El caos se generaliza entonces a todos los movimientos, que aparecen erráticamente entremezclados. De manera más precisa las órbitas, salvo posiblemente algunas excepcionales, llegan a pasar arbitrariamente cerca de los puntos representativos de todos los estados posibles. Estos sistemas se llaman ergódicos, porque cumplen la hipótesis ergódica de que se habló antes. Las consideraciones precedentes muestran que, tras muchos años de confusión, se empieza a entender el problema planteado por Boltzmann y que su famosa hipótesis ergódica es incorrecta: los sistemas integrables, totalmente regulares, y los ergódicos, totalmente desordenados, son casos extremos, teniendo el sistema genérico movimientos de los dos tipos. Conviene añadir que se sabe que la ergodicidad simple representa un grado muy reducido de desorden. A partir de ella hay toda una sucesión de formas de caos de violencia creciente que son objeto hoy día de gran atención. Entre ellos cabe mencionar el llamado gas de esferas duras, que sirve de modelo de multitud de fenónemos, como son la difusión de una mezcla de gases o un gas en un recinto.

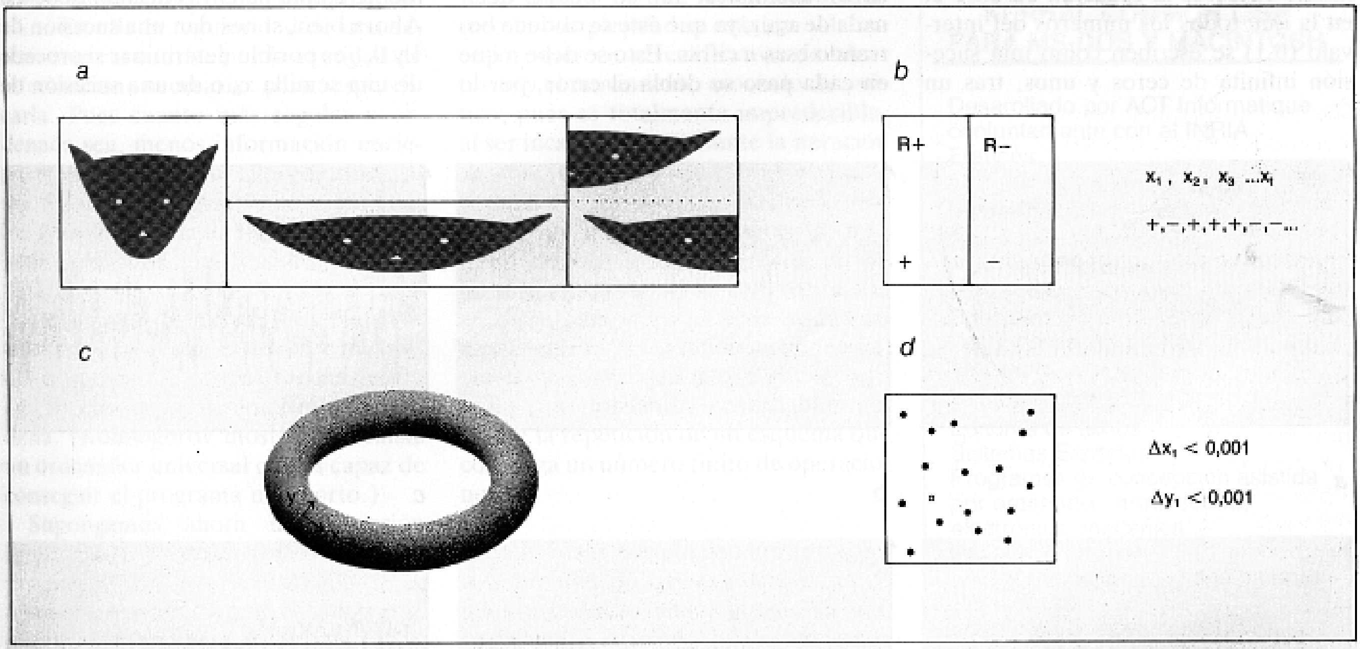
En los razonamientos anteriores se habla frecuentemente de movimiento regular como de aquel que puede predecirse y de caótico o turbulento como aquel en el que eso es imposible porque no aparece ninguna pauta regular. El concepto de regularidad tiene una larga tradición científica. Se usa mucho en expresiones tales como "regularidad de la naturaleza" y se suele decir que uno de los pasos más importantes del método científico consiste en observar regularidades para tratar luego de explicarlas. Pero, ¿qué es realmente una pauta regular? Trataremos ahora de dar un sentido preciso a este difícil concepto. Al observar un cambio o un movimiento, es posible a veces reconocer una recurrencia clara. Tal es el caso cuando el fenómeno estudiado es periódico, como ocurre con la sucesión del día y la noche o con la de las cuatro estaciones. Pero, si no sucede así, no se puede asegurar que, tras un tiempo suficiente, no aparezca alguna pauta imprevista.

Para aclarar esta cuestión conviene considerar la llamada evolución en grano grueso del sistema. Divídese, con tal fin, el espacio de las fases en un cierto número m de celdas, y se realizan observaciones a intervalos regulares (cada segundo, cada día o cada año), anotando el número de la celda en que está el punto representativo del sistema en ese momento y obteniendo así una sucesión de números menores o iguales a m. Si el movimiento no es caótico, la sucesión tendrá alguna regularidad; en la situación contraria no se observará ninguna, y la lista de números será semejante a la obtenida jugando repetidamente con una ruleta de m resultados posibles o tirando un dado con m caras iguales.

Sírvanos de ejemplo el estudio del movimiento del Sol sobre el fondo de las estrellas, dividiendo el cielo en 12 celdas iguales. Si anotamos el número de la celda en que está cada mes, obtendremos una sucesión de números entre 1 y 12 de gran regularidad, pues no sólo es periódica, sino incluso sinusoidal (reciben este nombre las funciones de la forma A sen ϕ, con $\phi=\omega t+\phi_0$, siendo t el tiempo, ω la frecuencia y A y ϕ_0 cantidades constantes), por lo que tiene una sola frecuencia que vale un ciclo por año. No cabe duda de que, conociendo la posición del Sol hasta el mes actual podemos predecir con éxito cual será la del próximo (esta división del cielo en 12 partes es la usada en astrología para realizar los horóscopos). Hay otros casos en que el movimiento se puede escribir como suma de varios términos sinusoidales, cada uno con una frecuencia distinta, por lo que se aplica el nombre de casi periódicos. Cuando así ocurre, la regularidad es algo más complicada, pero aún reconocible. Si, por ejemplo, observamos a Júpiter y anotamos su posición cada mes, nuestros datos reflejarán mezcladas las dos frecuencias de movimiento de revolución de Júpiter y de la Tierra alrededor del Sol. Si estudiamos uno de sus satélites, tendremos tres frecuencias, ya que habrá que añadir a las anteriores la del movimiento de éste alrededor de Júpiter.

En general, los sistemas casi periódicos con n frecuencias tienen pautas de evolución más complicadas que los simplemente periódicos, pero pueden ser considerados como regulares, aunque al crecer el número de frecuencias se hace más difícil hacer predicciones fiables, por razones de tipo práctico. Pero hay sistemas cuyas trayectorias son tan complejas que, para expresarlas como superposición de movimientos periódicos, se necesita un número infinito de frecuencias, de forma que el llamado espectro de frecuencias es continuo. En esos casos, por mucho que se analice su comportamiento y por mucho tiempo que se espere, nunca podremos encontrar una recurrencia permanente. Son los casos en que hay sensibilidad fuerte a los datos iniciales; son también los movimientos caóticos. De esta manera se identifica la pauta regular con conjunto discreto de frecuencias. Conviene advertir que, aun en el caso continuo, se pueden hacer predicciones, pero su fiabilidad desaparece siempre al cabo de un cierto tiempo, que será tanto menor cuanto mayor sea la intensidad del caos. Como dice gráficamente Ilya Prigogine, nuestra visión del mundo se realiza a través de una ventana temporal, más allá de la cual nuestro conocimiento desaparece.

Para precisar un poco más estos conceptos consideremos un sistema dinámico discreto en el intervalo (0,1), determinista y de gran sencillez, que, a pesar de ello, posee órbitas equivalen-



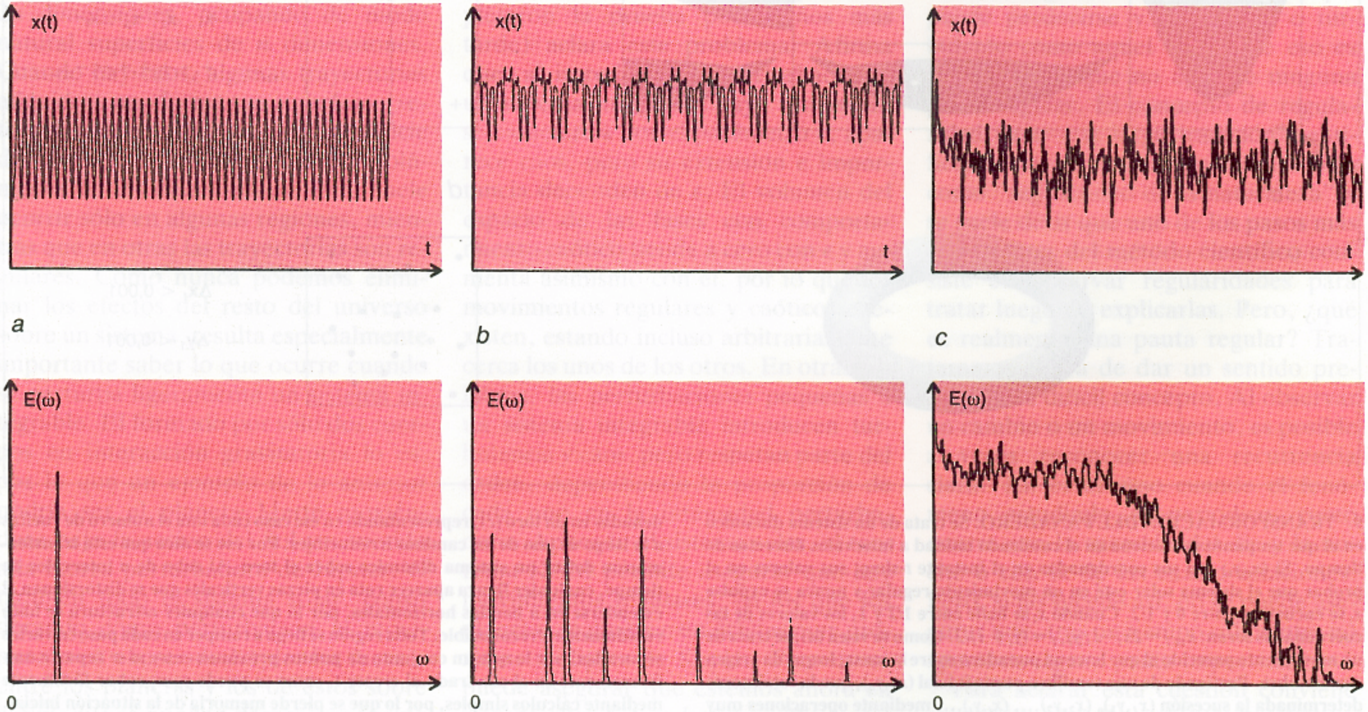
9. TRANSFORMACION DEL PANADERO. Se trata de un sistema dinámico en el que un punto evoluciona en el cuadrado unidad a intervalos discretos de tiempo. Si (x_t, y_t) son sus coordenadas en el instante t-símo, sus valores en el probar que el sistema solar esté en un movimiento regular y nunca se expulse x_t se encuentre entre 0 y 1/2. Cuando x_t se halle entre 1/2 y 1, los valores de las coordenadas serán: $x_{t+1} = 2x_t - 1$; $y_{t+1} = (y_t + 1)/2$. Como se ve en (*a*), se trata de un movimiento parecido al que hace un panadero sobre la masa, lo que da origen a su nombre. Partiendo de una semilla o punto inicial (x_0, y_0), queda totalmente determinada la sucesión (x_1,y_1), (x_2,y_2)..., (x_t,y_t)..., mediante operaciones muy simples (multiplicación y división por 2, suma y resta de 1). Es, por tanto, un sistema determinista. A pesar de ello, tiene un comportamiento extremadamente caótico, que hace imposible la predicción para valores grandes de t. Por ejemplo, si dividimos el cuadrado en las regiones R_+ y R_-, y asignamos a cada x_t un signo más o un signo menos, según en cuál de ellas se encuentre, las sucesiones de signos tienen, en general, las mismas propiedades que las de los resultados de un juego a cara o cruz. Los valores x e y pueden considerarse coordenadas en un toro (*c*), representando en ese caso cada una el número de vueltas a lo largo de uno de los caminos irreducibles. Por eso se dice que esta transformación define un sistema dinámico sobre el toro. Al cabo de n intervalos de tiempo, cualquier figura aparece rota en piezas verticales que se distorsionan al extenderse en n bandas horizontales, por lo que cualquier estructura se hace rápidamente irreconocible. Toda región se llega a romper en cada paso en varias separadas, por lo que un conjunto de puntos próximos entre sí se reparte uniformemente en el cuadrado al crecer t, como se puede comprobar fácilmente mediante cálculos simples, por lo que se pierde memoria de la situación inicial. En (*d*) aparece representada la décima generación de 16 semillas que distan entre sí menos de 0,001 y están dentro del círculo; se reparten por el cuadrado de manera caótica. Los errores se agrandan de tal modo que, si la semilla se conoce con una aproximación de $1/2^n$, se ignora totalmente la situación del sistema a partir de la generación n-sima. La transformación del panadero sirve de modelo para sistemas de comportamiento extremadamente caótico denominados mezcladores, en los que se pierde rápidamente la información de la situación inicial.

tes a sucesiones infinitas de tiradas a cara o cruz. Se trata del sistema definido por la ecuación $x_{t+1} = 2x_t$(módulo 1) donde (módulo 1) significa que se resta la parte entera y nos quedamos con la parte decimal. De esta forma se obtiene una sucesión de números x_0, x_1, x_2..., x_t... que está completamente determinada por la semilla x_0. No nos importa ahora la interpretación física de esos números, pues nos sirven únicamente de modelo de evolución determinista. Podemos pensar en ellos como en los valores de una variable de cualquier sistema medidos a intervalos constantes de tiempo o en la población de una especie en un territorio en generaciones sucesivas. Lo que importa es que sus propiedades, que son de estudio simple, pueden aparecer en otras pautas de evolución.

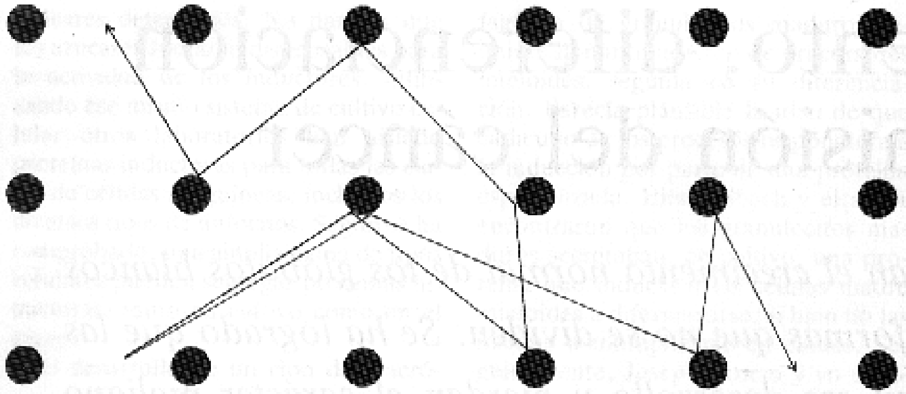
Dado el valor de x en el tiempo t, para obtener el correspondiente a $t+1$ basta con multiplicar por 2 y tomar la parte decimal; las operaciones son simples (un ejemplo de sucesión sería 0,65; 0,3; 0,6; 0,2; 0,4...). Es fácil, además, obtener la solución correspondiente a toda semilla x_0; evidentemente ésta es $x_t = 2^t x_0$ (módulo 1). Resulta conveniente expresar la ecuación en base 2, en la que todos los números del intervalo (0,1) se escriben como una sucesión infinita de ceros y unos, tras un cero y la coma decimal; así, por ejemplo, $x_0 = 0{,}100111101...$ En base 10, multiplicar por 10 y restar la parte entera a un número entre 0 y 1 equivalen a borrar la primera cifra decimal. Lo mismo ocurre en base 2, por lo que el paso de una generación a la siguiente se realiza también quitando el primer dígito tras la coma; x_t se obtiene, pues, de la semilla x_0 borrando las primeras t cifras. Descúbrese así que todos los x_t están determinados por la cadena de dígitos de x_0. La de un número racional (es decir, de la forma p/q con p y q enteros) es periódica, a partir de un cierto dígito, mientras que la de un irracional no sigue ninguna pauta reconocible. Por ello, las semillas racionales dan sucesiones periódicas; las irracionales, caóticas. Y como todo racional está infinitamente cerca de irracionales y viceversa, el orden y el caos están aquí íntimamente imbricados.

Dos semillas muy próximas dan lugar a sucesiones que, al cabo de un tiempo, no tienen nada que ver entre sí. Pues si coinciden sus n primeras cifras, los valores posteriores a x_n serán totalmente distintos, si difieren en la $n+1$. Análogamente, si x_0 se conoce sólo con n cifras decimales, no se puede decir nada de x_{n+1}, ya que éste se obtiene borrando esas n cifras. Esto se debe a que en cada paso se dobla el error, por lo que llega a ser tan grande que la predicción es imposible, a pesar de que se trata de un sistema determinista. La única forma de poder predecir para todas las generaciones es conocer las infinitas cifras decimales de x_0, lo que es imposible. Tenemos así un sistema que es caótico y determinista; caótico o turbulento porque la mayoría de sus movimientos no siguen pautas regulares; determinista, porque la semilla determina la sucesión y, además, impredecible porque hay sensiblidad fuerte a las condiciones iniciales. Por sorprendente que resulte, son muchos los sistemas físicos que se comportan así.

Consideremos ahora una partición de grano grueso muy sencilla, formada por sólo dos celdas: la de la izquierda, a la que asignamos el dígito 0 y que consta de los números menores que 1/2, y la de la derecha, constituida por los que son mayores o iguales que 1/2 a la que denominaremos celda 1. Como los números de la primera empiezan su parte decimal con cero y con uno los de la segunda, la sucesión de las medidas que indican si x_t está a la derecha o a la izquierda coincide exactamente con la de cifras decimales de x_0. Ahora bien, si nos dan una sucesión de 1 y 0, ¿es posible determinar si procede de una semilla x_0 o de una sucesión de



10. ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE UN MOVIMIENTO. Para estudiar el tipo de evolución temporal dado por la función $x(t)$ conviene examinar su espectro de frecuencias $E(\omega)$; $x(t)$ podría representar cualquier variable de cualquier sistema (por ejemplo, una señal luminosa, el registro de un encefalograma o de un sismógrafo o la temperatura media de una ciudad en el mes t-simo) y su espectro de frecuencias es análogo al de colores de la luz o al de notas musicales del sonido. Se han representado tres casos y, en cada uno, la señal $x(t)$ y su espectro de frecuencias $E(\omega)$. Cuando la señal es sinusoidal pura (*a*), sólo hay un "color", es decir, una frecuencia, indicada por el pico en $E(\omega)$. La evolución es muy regular. En el caso casi periódico (*b*), intervienen varias frecuencias (nueve en el caso de esta ilustración) y la evolución es simple, aunque más compleja que en (*a*). Cuando el espectro es continuo (*c*), la señal resulta ser caótica.



11. MODELO SIMPLIFICADO de la evolución de una molécula colisionando con otras iguales en un gas. Una partícula puntual se mueve en un billar formado por discos regularmente espaciados en los que rebota de forma elástica. El movimiento es impredecible porque las trayectorias próximas se separan exponencialmente, con una sensibilidad muy fuerte a cambios en los datos iniciales. Para predecir el movimiento dando los n discos correspondientes a las primeras n colisiones, es necesario especificar la posición y la velocidad inicial con un número de cifras significativas, C, proporcional a n. Con las dimensiones de la figura, para predecir 12 colisiones se necesita conocer los datos iniciales con un error menor que una billonésima y si los conocemos con n cifras significativas no podremos decir nada de la evolución desde la colisión $n+1$.

tiradas de una moneda, asignando 0 a la cara y 1 a la cruz? Se suele decir que son indistinguibles, en general: se trata, en efecto, de sucesiones aleatorias.

Pero, ¿qué significa que una sucesión sea aleatoria? La teoría de la complejidad, debida sobre todo al matemático ruso Kolmogorov, viene en nuestro auxilio. En ella la regularidad de una sucesión se caracteriza por la cantidad de información necesaria para especificarla. Pues cuanto más regular u ordenada sea, menos información encierra y recíprocamente. Por simplicidad seguimos considerando sólo sucesiones binarias de 0 y 1; cada término contiene 1 bit de información. Resulta, por ello, natural definir la complejidad $K^{(n)}$ (K por Kolmogorov) de una cadena de n ceros o unos como el número de bits del programa de ordenador más corto con el que se puede imprimir esa cadena. (Kolmogorov mostró que existe un ordenador universal que es capaz de conseguir el programa más corto.)

Supongamos ahora una sucesión muy simple, formada por n ceros; el programa mínimo sería "IMPRIMIR 0, n veces", que consta aproximadamente de $\log_2(n)$ bits para n grande. En el otro extremo, la longitud del programa para la sucesión $\{a_n\}$, por muy compleja que ésta sea, no puede ser mucho mayor que n, pues siempre se puede usar el programa "IMPRIMIR a_1, a_2, ..., a_n" que tiene aproximadamente n bits para n grande. En el caso de máxima complejidad, la forma más simple de especificar la cadena es enumerarla; parece adecuado pues, calificarla como aleatoria y, en nuestro contexto, caótica. Yendo ahora al caso de sucesiones infinitas, se define su complejidad como $K = \lim(K^{(n)}/n)$, con n que tiende a crecer infinitamente; si se trata de una repetición del mismo dígito, ese valor tiende a cero y lo mismo ocurre si es periódica. Esto indica que en una sucesión periódica hay información redundante.

En el caso de que K sea mayor que cero la complejidad es máxima y la sucesión merece el calificativo de aleatoria, y el movimiento asociado de caótico, pues es totalmente impredecible, al ser incalculable mediante la iteración de un algoritmo finito. Volviendo ahora a nuestro ejemplo, se puede probar que casi todas las sucesiones tienen máxima complejidad, por lo que las órbitas correspondientes son realmente caóticas, pues la mayoría de los reales, en el sentido de la medida, tienen cadenas de dígitos de máxima complejidad y son, por tanto, incalculables mediante la repetición de un esquema que contenga un número finito de operaciones.

Estas ideas nos pueden llevar a comprender en qué consiste el movimiento caótico. Simplemente, la mayoría de los sistemas dinámicos tienen trayectorias que no pueden calcularse para todo valor del tiempo mediante la iteración de un algoritmo finito y están, por tanto, fuera de la capacidad de una inteligencia humana. Como el sistema dinámico genérico tiene a la vez movimientos calculables e incalculables, la introducción de las probabilidades y el dualismo determinismo-probabilismo es una necesaria manifestación de la finitud del hombre en su lucha por conseguir una descripción matemática de la naturaleza.