Movimiento caótico

Los sistemas dinámicos deterministas, cuyo ámbito de aplicación cubre todas las ramas de la ciencia, tienen movimientos de tal complejidad que resulta imposible toda predicción, por cuya razón reciben el nombre de caóticos

Antonio F. Rañada

Uno de los resultados más sorprendentes de la física de los últimos años es la comprobación y el entendimiento de que, en contra de la idea que se tiene de la ciencia como descripción de la regularidad de la naturaleza, la mayoría de los sistemas dinámicos deterministas tienen movimientos tan complejos, con sus trayectorias entrecruzándose de forma tan errática y turbulenta, que resulta imposible toda predicción detallada para tiempos grandes y extremadamente difícil su estudio. En esos casos se habla de caos, de comportamiento caótico, turbulento o estocástico.

Constituye su característica más importante la extremada sensibilidad de los movimientos a pequeñas variaciones en las posiciones iniciales, que son imposibles de eliminar, bien como resultado de inevitables imprecisiones en las medidas, bien debidas a necesarias aproximaciones en los métodos de cálculo. Significa esto que dos trayectorias posibles que en el instante inicial están muy próximas pueden separarse de forma brusca y violenta al cabo de un tiempo, sin ninguna intervención exterior, por lo que una pequeña imprecisión en el dato inicial hace que podamos confundir una con la otra, lo que equivale a un error grande e, incluso, a un desconocimiento completo del estado final. Desde hace miles de años se utiliza esta característica de algunos sistemas en los juegos de azar (dados, monedas, ruletas) o para fines mágicos o adivinatorios (cartomancia). En esos casos, aunque se pueden hacer predicciones válidas si el tiempo es corto, se hacen muy difíciles cuando éste aumenta, hasta resultar imposibles con el crecimiento incontrolable del error.

Se sabía que esa estocasticidad o aleatoriedad aparece en sistemas con un número grande de grados de libertad. (Por grado de libertad se entiende cada una de las variables necesarias para la descripción de un sistema.) Pero resulta notable y nueva la constatación de que eso ocurre con una enorme generalidad, insospechada hasta hace poco, incluso en sistemas de aspecto muy simple con sólo dos o pocos más grados. Aunque Henri Poincaré y Albert Einstein lanzaron llamadas de atención sobre el problema, su preocupación no llegó a calar hasta los últimos años. Se tiene ahora la conciencia de que sus importantes consecuencias no sólo afectan a la física, la astronomía, la biología y otras ciencias afines, sino que incluso obligan a replantear aspectos básicos de la teoría de la ciencia. El descubrimiento de la ubicuidad del caos es, sin duda, la tercera gran revolución de la física del siglo XX, junto con las de la relatividad y la teoría cuántica, y sus consecuencias son, en opinión de muchos, de trascendencia comparable a las de éstas.

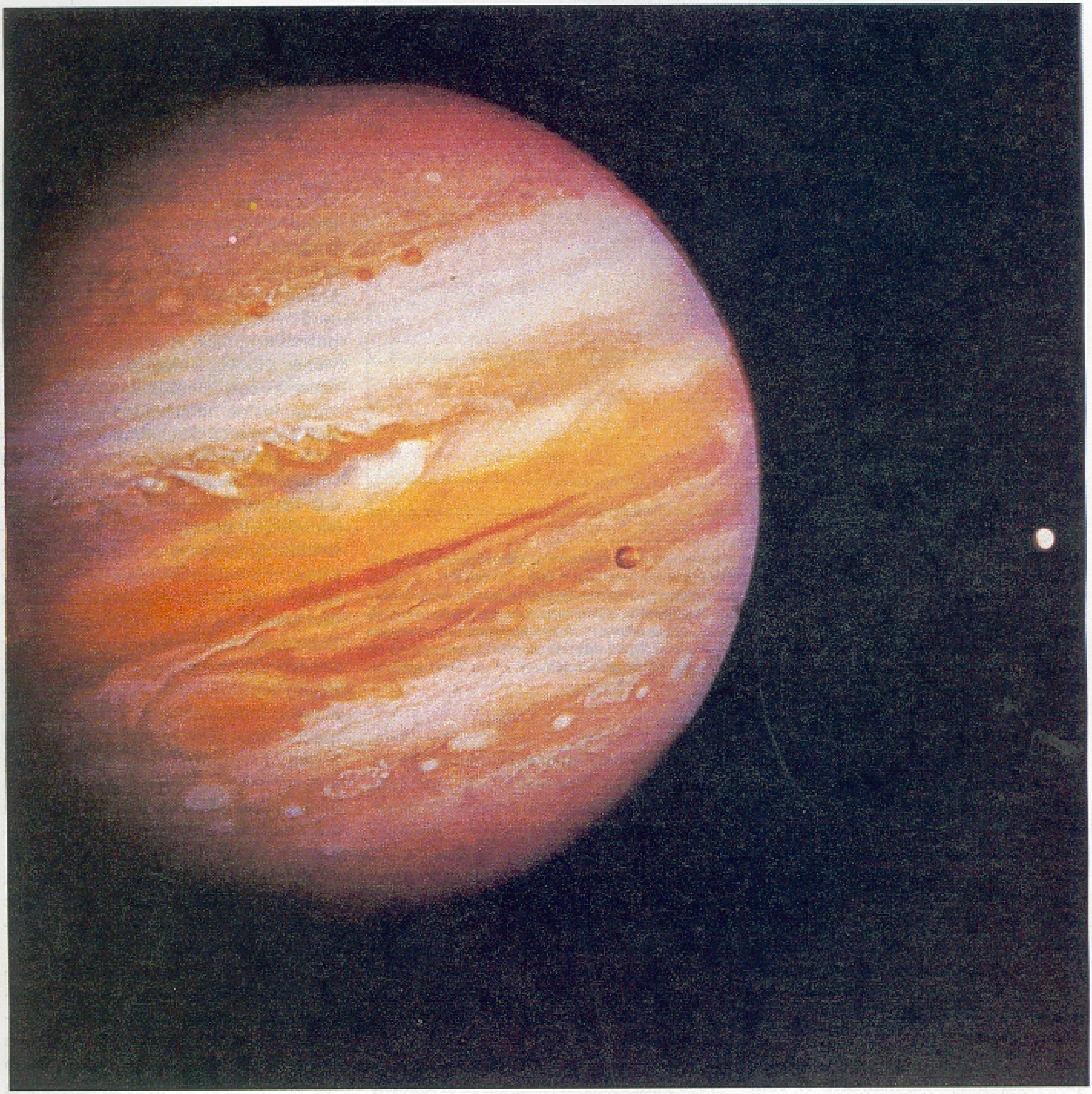
Todo esto puede causar sorpresa en una sociedad construida sobre la capacidad de la ciencia de predecir acertadamente el comportamiento del mundo material, pues el hombre hace constantemente predicciones que resultan correctas. La paradoja se explica porque uno de los criterios para la selección de los problemas a estudiar es el de simplicidad, lo que hace que los científicos hayan escogido, para empezar su aproximación al mundo físico, una primera clase de problemas fácilmente resolubles en los que la evolución temporal sigue pautas sencillas.

Conviene que el lector se familiarice con algunas nociones básicas que iremos manejando a lo largo del trabajo. Llamaremos coordenadas al conjunto de variables necesarias para la descripción geométrica de un sistema. En la mayoría de los casos son distancias o ángulos. Sus derivadas con respecto al tiempo son las velocidades. Para la descripción dinámica de un sistema se necesitan las coordenadas y las velocidades. A veces, si no siempre, convendrá echar mano de los momentos, que son funciones de las velocidades. En el caso de una partícula que tengamos que determinar mediante coordenadas cartesianas, los momentos equivalen al producto de la masa por las componentes de la velocidad.

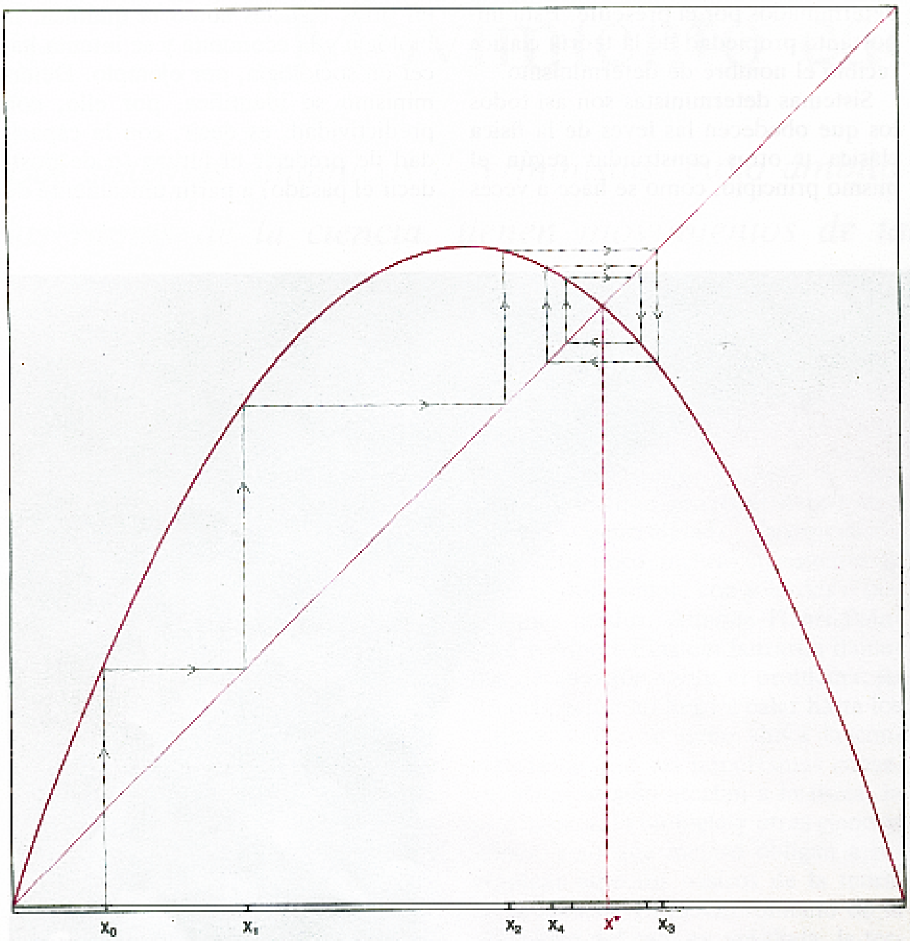
Ya aludido, utilizaremos bastante el concepto de número de grados de libertad. Trátase del número de coordenadas independientes, o también de momentos. La partícula que imaginemos ubicada en el plano, que sabemos posee dos dimensiones, tendrá dos grados de libertad; tres en el espacio tridimensional; n partículas en el espacio tendrán $3n$ grados. De acuerdo con ello, el estado de un sistema es la especificación del conjunto de los valores de las n coordenadas y los n momentos en un cierto tiempo. Y con el estado de un sistema se relaciona el espacio de las fases, que se define por el espacio de $2n$ coordenadas, cuyos puntos corresponden a los estados de un sistema. El punto representativo de un sistema describe una órbita o trayectoria al variar el tiempo (avanzar o retroceder).

Por razones de brevedad y sencillez, nos limitaremos en esta exposición a sistemas clásicos, es decir, a aquellos en que no intervienen los efectos de la física cuántica. Y conviene, en primer lugar, explicar por qué los éxitos de la ciencia han podido llevar a la idea de que las cosas evolucionan de manera necesaria hacia un resultado previsible. La mecánica, parte de la física y las matemáticas que trata de la descripción del movimiento, lo hace mediante ecuaciones diferenciales, que son relaciones que permiten calcular las aceleraciones en función de las posiciones y las velocidades. Cada una de esas ecuaciones tiene infinitas soluciones que corresponden a los infinitos movimientos que podría seguir el objeto estudiado. Pero sólo hay una que corresponda al estado en el momento actual. (Estado de un sistema significa aquí el dato de todas las posiciones y velocidades.) Por ello, conocida la ley, una vez dado el estado actual, queda fijada la solución, es decir, el movimiento, para todos los valores del tiempo. En otras palabras, tanto el futuro como el pasado quedan determinados por el presente. Esta importante propiedad de la teoría clásica recibió el nombre de determinismo.

Sistemas deterministas son así todos los que obedecen las leyes de la física clásica u otras construidas según el mismo principio, como se hace a veces en otras ciencias como la química, la biología y la economía y se intenta hacer en sociología, por ejemplo. Determinismo se identifica, por ello, con predictividad, es decir, con la capacidad de predecir el futuro (o de postdecir el pasado) a partir únicamente de



1. ORDEN Y CAOS. Júpiter, con sus lunas y sus ciclones de diversos tamaños, ilustra expresivamente la dualidad orden-caos que se manifiesta, de manera permanente y ubicua, en la naturaleza. Io y Europa, dos de los cuatro satélites descubiertos por Galileo en 1610, giran en torno al gran astro siguiendo órbitas estables y regulares que cumplen las leyes de Kepler. En cambio, en la turbulenta superficie del planeta, el caos se manifiesta en una impresionante variedad de vórtices de distintos tamaños, tanto más impredecibles cuanto más pequeños. El mayor de ellos, la Gran Mancha Roja, descubierta por R. Hooke en 1664, es un enorme anticiclón en el que cabría la tierra entera y se mueve lentamente desde hace más de 300 años, de forma no violenta aunque impredecible en sus detalles. Otros torbellinos menores tienen escalas de tiempo de varios decenios, períodos en que pueden predecirse aproximadamente sus movimientos. Tal es el caso del óvalo blanco que se distingue claramente al sur de la Gran Mancha Roja, aparecido inesperadamente en 1938 y del que no se puede saber cuánto durará. La escala de la turbulencia continúa con remolinos menores de movimientos más erráticos y vida más corta, tan sólo de años o meses, hasta llegar a pequeños pero vertiginosos tornados que se forman y se destruyen en una agitación incesante, a la que sólo se puede aplicar métodos estadísticos. El mismo fenómeno se da en la atmósfera terrestre, aunque con menor diversidad en las escalas, desde los grandes ciclones y borrascas cuyas vidas pueden durar varias semanas, hasta los muy pequeños turbiones y trombas que se crean y desaparecen en momentos, pasando por los huracanes y tifones. No obstante lo anterior, debe subrayarse que no se puede excluir la posibilidad de que Io y Europa entren en movimiento caótico debido a perturbaciones de otros cuerpos celestes.



2. SISTEMA DINAMICO DISCRETO que exhibe con claridad cómo aparecen propiedades complejas detrás de operaciones matemáticas muy sencillas. Representamos la función $y = bx(1 - x)$ con $b = 2{,}9$ (*negro continuo*). Dado un valor x_0 se traza una línea vertical de abscisa x_0 hasta $f(x)$, seguida de una horizontal hasta la bisectriz $y = x$; la nueva abscisa será x_1. Reiterando el proceso se obtiene una línea quebrada (*negro de trazos*), cuyos segmentos verticales tienen abscisas $x_2, x_3, \ldots$, que tienden a x^*, determinada por la intersección de $f(x)$ con la bisectriz $y = x$ (*azul*). Este sistema podría formalizar el de la vida real constituido por una especie biológica en un territorio: x_t sería entonces la población en la generación t y x^* su nivel natural.

los datos actuales. El sistema solar ofrece abundantes muestras, pues sus astros están siempre en las posiciones predichas anteriormente, como atestigua en estos momentos el paso del cometa Halley. Otro ejemplo, particularmente expresivo, es el del llamado eclipse de Herodoto. Nos cuenta este historiador griego que, cuando los lidios y los medos se enfrentaban en una batalla, "el día se transformó en noche súbitamente". El eclipse, que había sido predicho por Tales de Mileto, produjo tal impresión a los contendientes que cesaron inmediatamente el combate y acordaron la paz. Pero Herodoto no da la fecha de la batalla, de la que no hay ningún otro dato histórico. Sin embargo, sabemos hoy que tuvo lugar el 28 de mayo del año 584 a.C., por la tarde. Para ello basta con resolver las ecuaciones del sistema solar, a partir de su estado actual, lo que permite asegurar que esa fue la fecha del eclipse.

Esta capacidad predictiva, de la que se empezó a tomar conciencia a partir de Newton y Euler, sirvió de base conceptual a una doctrina conocida como mecanicismo, que influyó notablemente en el pensamiento posterior. El francés Pierre Simon de Laplace la formuló en su forma más radical en 1814 en su obra "Ensayo filosófico sobre las probabilidades" en la que afirma, en una famosa frase, que para "una inteligencia que conociera en un instante dado todas las fuerzas de la naturaleza y la situación de los seres que la componen y fuera suficientemente poderosa para someter esos datos al análisis matemático... nada sería incierto y el futuro y el pasado estarían presentes ante sus ojos". Está claro que para Laplace y el pensamiento mecanicista no hay azar: todo está determinado y todo es predecible. Este punto de vista alcanzó una enorme influencia y fue aplicado abundantemente, por ejemplo, para negar la libertad humana como incompatible con la física y la química.

Pero el estudio de sistemas complejos con muchos grados de libertad, como es el caso de un litro de aire que tiene unas 10^{25} moléculas (10 billones de billones) propició el nacimiento de otra tradición. Pues, al resultar inaplicables los métodos deterministas por la imposibilidad de manejar simultáneamente todos los datos, hubo que recurrir a leyes probabilistas y al uso de valores medios, de la misma manera que, al estudiar la riqueza de un país, se usa el concepto de renta per cápita. En ese caso, no hay determinismo: sólo se pueden predecir probabilidades.

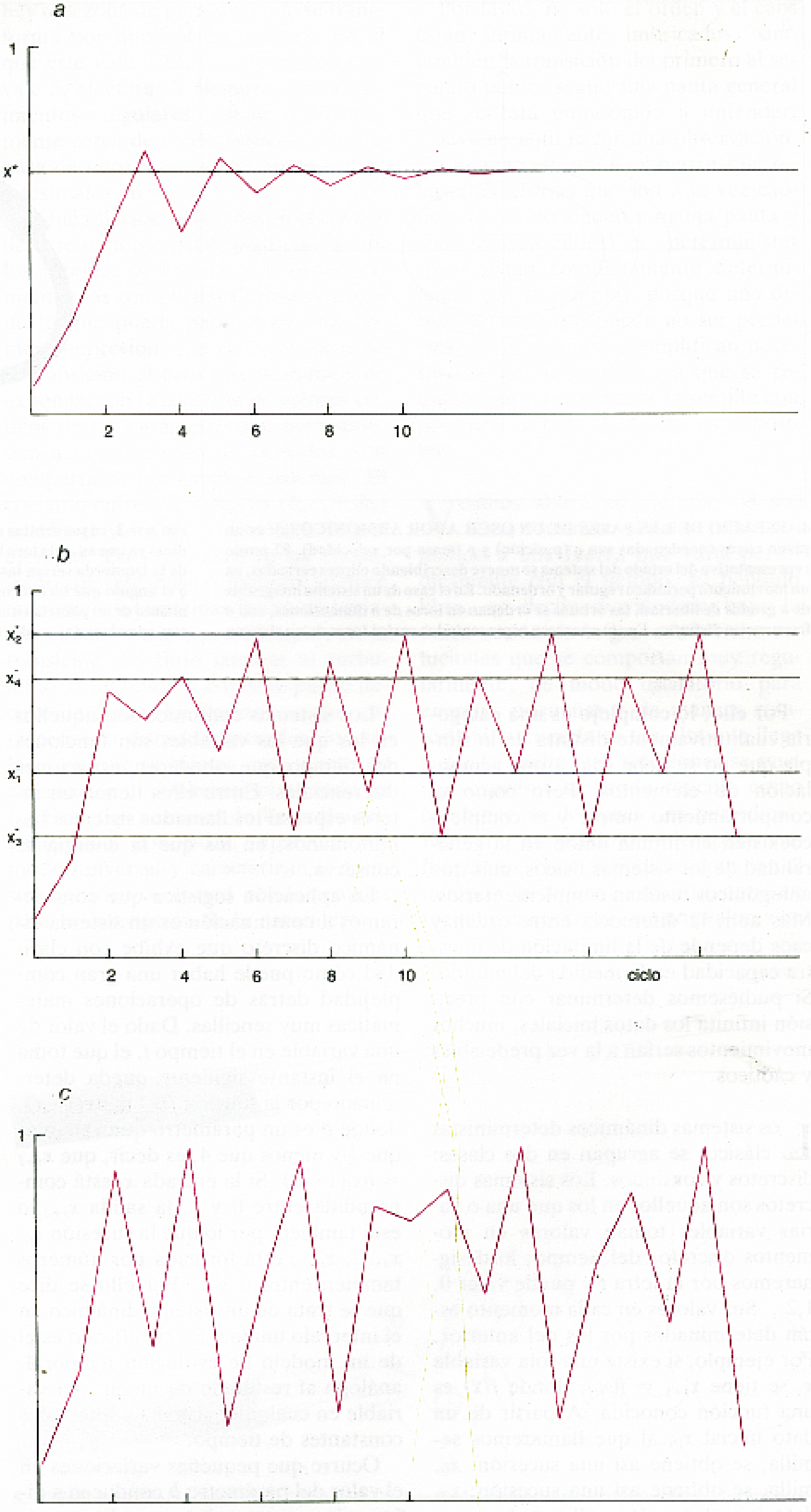
Mientras que el mecanicismo consideraba todos los movimientos como regulares, el probabilismo los concebía desordenados, tras la aparente simplicidad de algunos casos. Quizá la expresión más clara de ese desorden se manifiesta en la famosa hipótesis ergódica, propuesta por el físico vienés Ludwig Boltzmann en 1871. De acuerdo con la misma, todos los movimientos de un sistema pasan arbitrariamente cerca de cualquiera de sus estados posibles si se espera un tiempo suficiente. Como esto ocurriría para todas las condiciones iniciales, se comprende que debería perderse la predictividad, pues desde cualquier estado se puede ir a cualquier otro. Pero, en ese caso, se puede calcular el promedio de una magnitud a lo largo del tiempo. Puesto que en la evolución se pasa por todos los estados posibles, dicho promedio temporal debe ser igual al evaluado sobre los estados posibles, que es mucho más fácil de calcular. De esta forma, la hipótesis ergódica permite obtener los promedios y se puede fundamentar la mecánica estadística. Este punto de vista enfrenta a la frase de Laplace antes citada otra, no menos famosa, debida al escocés James Clerk Maxwell: "La lógica verdadera de este mundo está en el cálculo de probabilidades".

La oposición entre esas dos tradiciones –mecanicismo y probabilismo– tenía antiguas raíces históricas. Pues Demócrito, creador junto con Leucipo de la teoría atomista, decía ya hacia el año 400 a.C.: "todo se debe al azar y a la necesidad"; intentando conciliar así el devenir y el ser, base de las concepciones antagónicas de Heráclito y Parménides respectivamente. El que el bioquímico francés J. Monod eligiese precisamente esa frase para titular su influyente libro "El azar y la necesidad", en el que trata de fundamentar la biología moderna, relacionando la necesidad con la estabilidad de las especies y el azar con las mutaciones, muestra bien a las claras la importancia de esa dualidad.

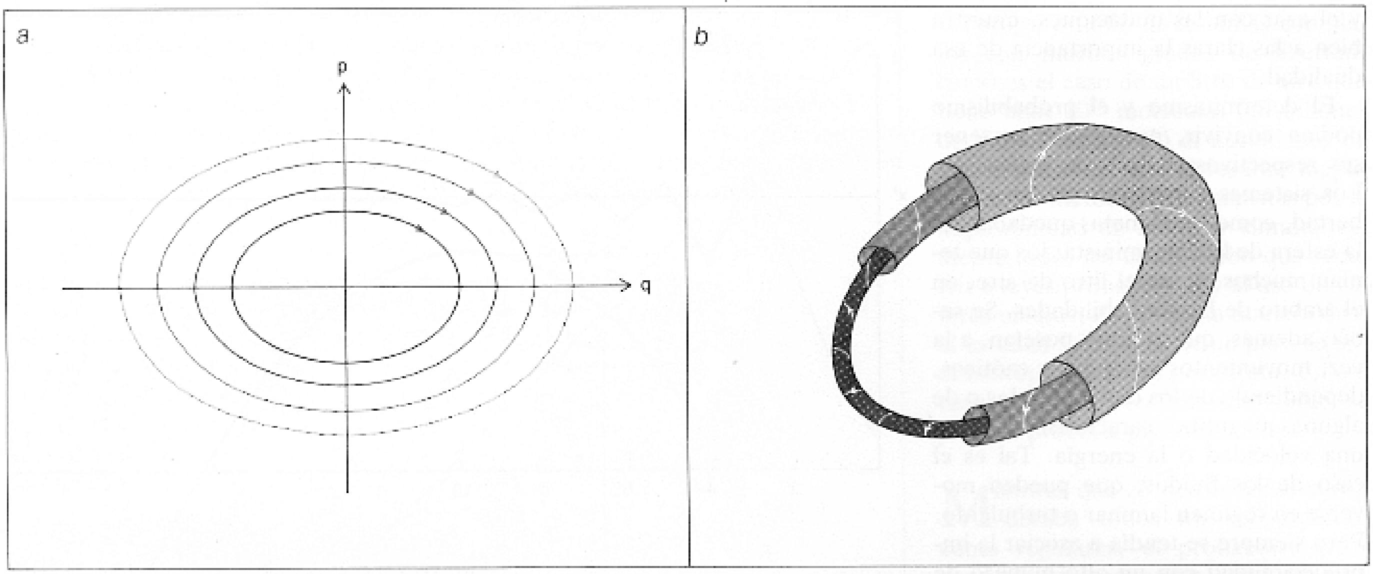
El determinismo y el probabilismo podían convivir, pues parecían tener sus respectivos campos de aplicación. Los sistemas con pocos grados de libertad, como un planeta, quedaban en la esfera de lo determinista; los que tenían muchos, como el litro de aire, en el ámbito de las probabilidades. Se sabía, además, que algunos poseían, a la vez, movimientos regulares y caóticos, dependiendo de los datos iniciales o de alguna magnitud característica como una velocidad o la energía. Tal es el caso de los fluidos, que pueden moverse en régimen laminar o turbulento. Pero siempre se tendía a asociar la impredecibilidad con un alto número de grados de libertad. Por ello lo complejo era una categoría cuantitativa, mera acumulación de elementos simples.

Pero la estructura conceptual de esa dualidad era incorrecta, lo que suponía una constante fuente de incomodidad y ambivalencia, situación que se agravó cuando se llegó a comprender, a finales del siglo XIX, gracias sobre todo a Poincaré, que un sistema que debería ser simple, el de los tres cuerpos, ofrecía también comportamiento caótico impredecible. Ante ese grave problema, se adoptó la táctica de ignorarlo, lo que enredó la confusión reinante. Sin decirlo claramente, se presentaba el sistema de los tres cuerpos como si fuera una patología, cuando es más representativo de la dinámica genérica que el péndulo o el oscilador, ejemplos con que se suelen ilustrar las teorías.

Ambas tradiciones tienen su parte de razón y no son incompatibles. Se ha llegado a entender cómo el determinismo de las ecuaciones básicas no garantiza la predictividad en la práctica. Para ello es necesario, además, que al variar ligeramente los datos iniciales no cambie mucho la trayectoria, y así nuestros inevitables errores no se agranden al pasar el tiempo. Se ha podido demostrar que los sistemas dinámicos tienen, en general y simultáneamente, movimientos regulares y caóticos entrelazados, con datos iniciales arbitrariamente próximos. Esto ocurre ya en sistemas aislados con sólo dos grados de libertad, e incluso con uno solo si está sometido a una fuerza exterior dependiente del tiempo. Muchos se sorprenderán si decimos que el péndulo, frecuente representación de lo regular, se puede comportar de modo caótico si se le somete a una fuerza que varíe periódicamente con el tiempo.



3. LLAMASE ATRACTOR a la solución donde todas las trayectorias convergen. Se esquematizan tres situaciones de la sucesión x_t. En el caso superior, $b = 2{,}9$, tenemos un atractor simple, con $x^* = 0{,}655$. En el centro $b = 3{,}5$ (atractor de periodo 4; $x^*_1 = 0{,}501$; $x^*_2 = 0{,}875$; $x^*_3 = 0{,}383$; $x^*_4 = 0{,}827$). Los tres casos se observan en la naturaleza. En el esquema inferior, $b = 3{,}8$ (sucesión caótica sin pauta regular). Ejemplos pertinentes de los tres esquemas serían: una especie biológica cuya población en un territorio (una clase de pájaros en un valle, una bacteria que infecta a un humano) tiende a su nivel natural, otra en la que la población varía periódicamente en ciclos de 4 años, con años de abundancia, como cuando $x=x^*_2$, y otros de escasez, cuando $x=x^*_3$, y, finalmente, otra en la que el número de individuos cambia erráticamente, sin pauta regular.



4. ESPACIO DE LAS FASES DE UN OSCILADOR ARMONICO (*a*): es un plano cuyas coordenadas son *q* (posición) y *p* (masa por velocidad). El punto representativo del estado del sistema se mueve describiendo elipses cerradas, en un movimiento periódico regular y ordenado. En el caso de un sistema integrable de *n* grados de libertad, las órbitas se ordenan en toros de *n* dimensiones, con *n* frecuencias distintas. En (*b*) aparecen representados varios toros de un sistema con $n = 2$, cuyas órbitas se pueden expresar como suma de dos funciones periódicas ya que en cada toro hay dos caminos irreducibles. Ejemplo de la ilustración de la izquierda serían las oscilaciones pequeñas del péndulo de un reloj, siendo *q* el ángulo que forma con la vertical, y de la ilustración de la derecha el movimiento de un planeta en su órbita, despreciando las fuerzas debidas a los demás, con coordenadas *r* (distancia al Sol) y ϕ (ángulo en el plano de la órbita).

Por ello, lo complejo es una categoría cualitativamente distinta de lo simple que no se debe sólo a una acumulación de elementos. Pero como el comportamiento simple y el complejo coexisten en íntima unión en la generalidad de los sistemas físicos, más que antagónicos resultan complementarios. Más aún, la diferencia entre orden y caos depende de la limitación de nuestra capacidad en la medida del mundo. Si pudiésemos determinar con precisión infinita los datos iniciales, muchos movimientos serían a la vez predecibles y caóticos.

Los sistemas dinámicos deterministas clásicos se agrupan en dos clases: discretos y continuos. Los sistemas discretos son aquellos en los que una o varias variables toman valores en momentos discretos del tiempo; lo designaremos por la letra t y puede valer 0, 1,2... Sus valores en cada momento están determinados por los del anterior. Por ejemplo, si existe una sola variable x, se tiene $x_{t+1} = f(x_t)$, donde $f(x)$ es una función conocida. A partir de un dato inicial x_0, al que llamaremos semilla, se obtiene así una sucesión: x_0,
milla, se obtiene así una sucesión: x_0,
dato inicial x_0, al que llamaremos se-
x puede representar la población de una especie en el año t-simo, que depende de la del año anterior y de factores ambientales descritos por la función f. Puesto que esta aplicación resulta frecuente, se suele llamar generación a cada paso.

Los sistemas continuos son aquellos en los que las variables son funciones del tiempo que obedecen ecuaciones diferenciales. Entre ellos tienen un interés especial los llamados sistemas hamiltonianos, en los que la energía se conserva.

La aplicación logística que consideramos a continuación es un sistema dinámico discreto que exhibe con claridad cómo puede haber una gran complejidad detrás de operaciones matemáticas muy sencillas. Dado el valor de una variable en el tiempo t, el que toma en el instante siguiente queda determinado por la función $f(x) = bx(1 - x)$, donde b es un parámetro que vale más que 1 y menos que 4, es decir, que $x_{t+1} = bx_t(1 - x_t)$. Si la entrada x_t está comprendida entre 0 y 1, la salida x_{t+1} lo está también, por lo que la sucesión x_0, $x_1,..., x_t...$, está formada por números también entre 0 y 1. Por ello se dice que se trata de un sistema dinámico en el intervalo unidad. Su significado es el de un modelo de evolución temporal, análogo al resultado de medir una variable en cualquier sistema a intervalos constantes de tiempo.

Ocurre que pequeñas variaciones en el valor del parámetro b conducen a diferencias espectaculares en el comportamiento de x_t. Si b es inferior a un valor crítico $b_c = 3{,}569945...$, las sucesiones o trayectorias x_t son muy regulares; pero si b rebasa ese límite, irán variando de forma totalmente caótica en todo el intervalo (0,1).

Aunque este sistema fue estudiado por primera vez por P.J. Myrburg hacia el año 60, no suscitó interés general hasta que N. Metropolis, P. Stein y M. Stein descubrieron, 10 años más tarde, que sus propiedades las compartía una clase muy general de sistemas caracterizados por funciones f con un máximo de tipo cuadrático; es decir, aproximable por un polinomio de grado 2. Su comportamiento es, pues, muy representantivo.

Estudiemos el sistema para un valor pequeño de b. La sucesión x_t podría ser el número de individuos de una especie biológica en un territorio. Mediante una calculadora de bolsillo veríamos que tiende a un valor constante $x^* = (b-1)/b$, independiente de x_0. Todas las trayectorias se aproximan a ese límite común al crecer t. Como este valor de x parece atraer a todas las sucesiones, recibe el nombre de atractor. En nuestro ejemplo, x^* será el nivel natural al que tiende la población, sea cual sea la inicial. Si en un momento mueren muchos individuos, x decrecerá bruscamente, pero tenderá a recuperarse y volver a ese nivel natural [*véase la figura 3*]. Si x es menor que x^*, la población está por debajo de las posibilidades del territorio y x tiende a crecer; las condiciones de vida son favorables.

En cambio, si x es mayor que x^*, entonces x en el tiempo t será mayor que un intervalo después: la población tiende a disminuir, quizás por escasez de alimentos o de espacio para tantos.

El valor x^* se define por la condición $x^* = f(x^*)$, lo que significa que existe una sucesión con todos los valores iguales a x^*; si en un cierto tiempo la población tiene su nivel natural, permanecerá constante.

Al aumentar b, crecerá también x^*, lo que podría corresponder a un cambio favorable en las condiciones del territorio. Pero, cuando b supera el valor $b_1 = 3$, algo curioso sucede, pues el movimiento sigue siendo regular, pero ya no hay un límite común a todas las trayectorias. Antes bien, éstas tienden a oscilar entre dos valores x^*_1 y x^*_2, por lo que se dice que el atractor ha duplicado su período, que ahora vale 2. Si damos a la semilla el valor x^*_1 (o x^*_2), la sucesión oscilará exactamente entre x^*_1 y x^*_2. Se sabe que, en algunas ocasiones, las especies biológicas se comportan así, con alternancia de años de abundancia y otros de escasez, fenómeno que estudió el matemático V. Volterra ya en 1920, cuando un amigo pescador le explicó su sorpresa por las oscilaciones en las capturas de algunas especies en el Adriático.

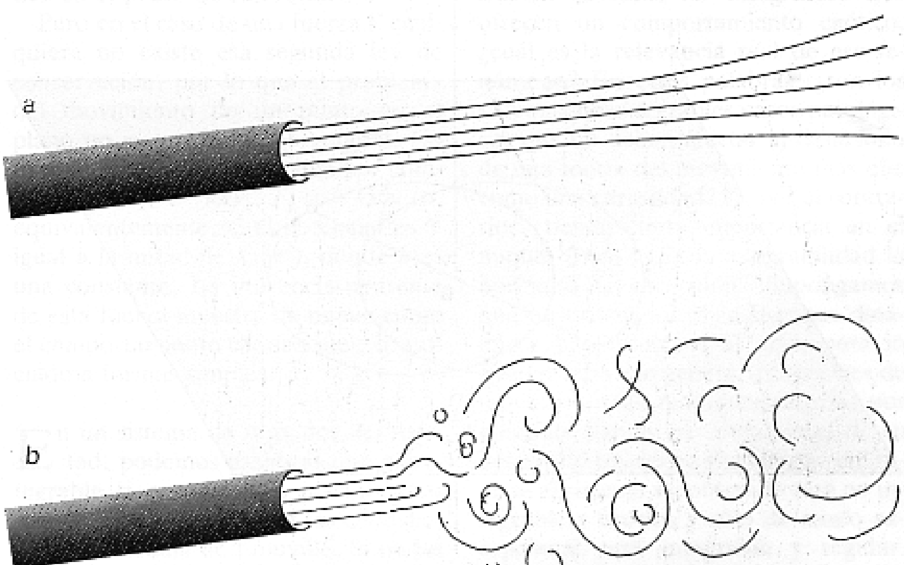
Si seguimos aumentando b pasaremos por un valor $b_2 = 3{,}449$. Resultará que, inmediatamente por encima, las soluciones tienden a un atractor de período 4, es decir, a un ciclo regular de cuatro generaciones que se va repitiendo. Y así encontraremos valores b_3, b_4, etcétera, con la propiedad de que, tras b_n, las trayectorias tienden a ciclos de período 2^n, después de su duplicación. El comportamiento ya no es tan sencillo, pero se sigue una pauta regular: basta esperar un tiempo suficiente para que las trayectorias se aproximen a movimientos periódicos. Son, pues, fácilmente predecibles.

Pero, si b supera el valor crítico b_c, antes indicado, la situación cambia radicalmente. A partir de b_c, las trayectorias recorren erráticamente el intervalo (0,1), sin seguir ninguna pauta reconocible, por muchas generaciones que esperemos. Además, dos semillas distintas, aunque estén muy próximas, originan sucesiones que, al cabo de cierto tiempo, no se parecen en nada; se dice que el sistema olvida las condiciones iniciales. Curiosamente, se han observado algunos casos de poblaciones de insectos o de pájaros que evolucionan de esa forma aparentemente caótica. Pero aún no se han acabado las sorpresas, pues en el intervalo entre b_c y 4 [máximo valor de b para que x no se salga de (0,1)] aparecen pequeñas ventanas de comportamiento regular. Por ejemplo, a partir de 3,84 hay una zona de período 3 que se transforma por duplicación en otras en el que éste vale 6,12, ..., y otras en que vale 5, etcétera. Y siempre esos movimientos regulares están arbitrariamente cerca de otros caóticos, pues se pasa de unos a otros por cambios infinitesimales en b.

¿Qué relación tienen las propiedades de este ejemplo académico con las de los sistemas de la vida real, necesariamente más complicados? Bastante más de lo que pueda parecer en una primera impresión. Las características de la transición al caos que acabamos de exponer, con la sucesión de valores críticos de un parámetro que corresponden a duplicaciones de períodos, son compartidos por muchos sistemas. El cociente entre $(b_n - b_{n-1})$ y $(b_{n+1} - b_n)$ tiende al valor $\delta = 4{,}669201...$, por ejemplo. En estos años se ha encontrado que ese mismo número aparece en numerosos sistemas físicos en variadas circunstancias, por ejemplo, en la transición del flujo laminar al turbulento de un fluido. Lo mismo puede decirse de otro valor llamado α, que caracteriza la distancia entre los dos valores en que se bifurca cada punto de un atractor al duplicarse el período en b_n. Esos dos números de Feigenbaum, como son conocidos, aparecen de modo universal y caracterizan la transición orden-caos; son fundamentales para la descripción de la naturaleza.

Por tanto, no solo el orden y el caos están íntimamente imbricados, sino también la transición del primero al segundo parece seguir una pauta general que se está empezando a entender. Conviene aquí hacer una observación. En la zona en que b es mayor que b_c, hay trayectorias que son a la vez caóticas (pues no siguen ninguna pauta y son impredecibles) y deterministas (pues están completamente determinadas por la semilla), porque una órbita determinista puede no ser predecible si los errores se amplifican necesariamente sin control, ya que se requiere entonces conocer la semilla con precisión infinita. Pero eso es imposible.

Veamos ahora un ejemplo de sistema continuo: el del péndulo sometido a una fuerza que varía periódicamente con el tiempo. El péndulo libre, es decir, moviéndose bajo la única acción de la gravedad, tiene soluciones que se comportan muy regularmente, de modo oscilatorio para energías pequeñas y de manera rotatoria si la energía es tan alta que llega a dar la vuelta; sus soluciones se pueden expresar de modo sencillo como combinación de funciones periódicas. Pero si a un péndulo se le aplica una fuerza que varía periódicamente con el tiempo y un amortiguamiento, entra en régimen caótico para ciertos valores de



5. TURBULENCIA Y NUMERO DE REYNOLDS. Los fluidos tienen movimientos regulares y turbulentos o caóticos. En el primer caso, representado en (*a*), las partículas de fluido siguen líneas de corriente bien determinadas que se separan lentamente, de modo lineal en el tiempo; además, dos partículas que pasan por el mismo punto con un intervalo temporal Δt siguen la misma línea de corriente. Ninguna de estas dos propiedades se mantiene en el caso de movimiento turbulento, pues las partículas que en un cierto momento están próximas se separan deprisa, de modo exponencial, y sus trayectorias no guardan ninguna relación al cabo de un tiempo corto, por lo que se dice que olvidan las condiciones iniciales. El tipo de movimiento se caracteriza por el número de Reynolds R, cantidad sin dimensiones que es directamente proporcional a la velocidad característica del flujo, e, inversamente, a su viscosidad. Cuando R es pequeño, el flujo es regular, pero al aumentar se hace turbulento, tanto más cuanto mayor sea R. Las predicciones son válidas en un período de tiempo T que es grande si R es pequeño, pero que disminuye y llega a anularse al crecer R.