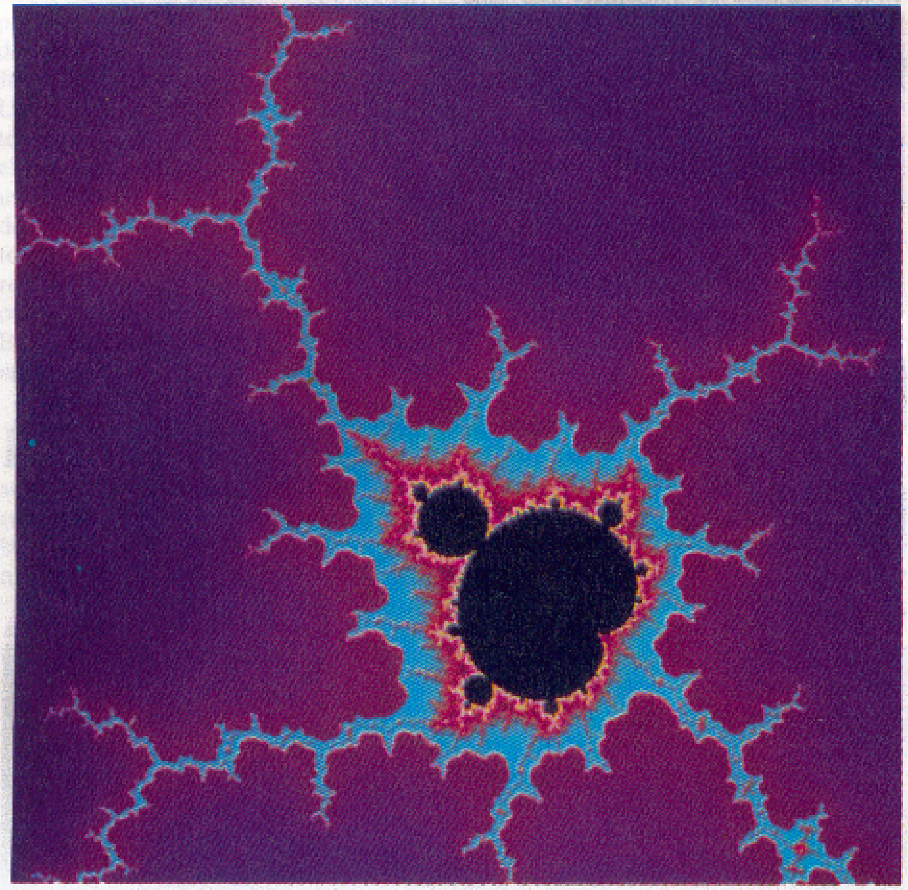
f



4. Un Mandelbrot miniatura, en la región f *de la figura 1, retenido por un filamento al conjunto principal*

hasta 32 bits. Con esta doble precisión, Magi y yo calculamos que pueden lograrse amplificaciones del orden de 30.000 aumentos. Con programación de cálculo apropiada, inspirada en la idea de ensartar en una larga ristra estos números, la precisión numérica puede ser de cientos de dígitos significativos. La amplificación del conjunto de Mandelbrot teóricamente alcanzable con tales precisiones es mucho mayor que la necesaria para resolver en partículas el núcleo atómico.

¿En qué lugares del plano complejo deberíamos efectuar nuestra exploración? En la vecindad del conjunto de Mandelbrot, claro está; pero, ¿dónde exactamente? Hubbard dice que "hay millones de preciosos lugares". Como si fuera un turista en tierras de infinitas bellezas, Hubbard bulle de sugerencias de lugares donde a los lectores puede agradarles explorar. Sus nombres no son Hawai, Hong-Kong o Bali, sino "la región comprendida entre 0,26 y 0,27 para la parte real, y entre 0 y 0,1 de parte imaginaria". Hubbard recomienda, igualmente, otros dos lugares:

Parte real	*Parte imaginaria*
de −0,76 a −0,74	de 0,01 a 0,03
de −1,26 a −1,24	de 0,01 a 0,03

El lector que examine las fotografías en color que ilustran este artículo debe tener bien presente que los puntos cuyo color no sea negro no pertenecen al conjunto de Mandelbrot. La belleza de las fotografías reside, en buena medida, en el halo de color asignado a los puntos que divergen hacia infinito. En efecto, si mirásemos aisladamente el conjunto propiamente dicho, su imagen no nos resultaría tan grata. El conjunto de Mandelbrot está todo él recubierto de largos filamentos y de versiones en miniatura de sí mismo.

En realidad, ninguna de las versiones miniaturizadas del Mandelbrot son copias exactas del conjunto paterno; tampoco hay dos de estas miniaturas que sean exactamente iguales. En las proximidades del conjunto paterno hay todavía más Mandelbrots diminutos, al parecer, flotando libremente en el plano complejo. Mas su apariencia es engañosa. Un teorema sorprendente, demostrado por Hubbard y por uno de sus colegas, Adrian Douady, de la Universidad de París, enuncia que el conjunto de Mandelbrot es conexo. Por consiguiente, incluso los diminutos Mandelbrot que parecen encontrarse en suspensión en el plano tienen que estar ligados al conjunto paterno por filamentos. Se encuentran estas miniaturas en casi toda la vecindad del conjunto paterno, y las hay de todos los tamaños. Todo cuadrado de la región contiene una infinidad de ellas; de las cuales, a lo sumo unas cuantas son visibles a una amplificación dada. Según Hubbard, el conjunto de Mandelbrot "es el más complicado objeto que existe en matemáticas".

Tras habernos enfrentado a tan infinita complejidad, siempre es reconfortante refugiarse en lo finito. La iteración de un proceso de elevación al cuadrado, efectuado sobre un conjunto finito de enteros ordinarios, engendra asimismo estructuras interesantes. Estructuras que no son ahora geométricas, sino combinatorias.

Tomemos un número cualquiera, entre 0 y 99. Elevémoslo al cuadrado y tomemos las dos últimas cifras del resultado, lo que dará también un número comprendido entre 0 y 99. Por ejemplo, 59^2 es igual a 3481; las dos últimas cifras son 81. Repitamos el procedimiento una y otra vez. Antes o después habrá de aparecer un número con el que ya nos hayamos encontrado. Por ejemplo, de 81 resulta la sucesión 61, 21, 41 y 81, y esta serie de cuatro números se repite desde entonces indefinidamente. En conjuntos finitos es inexorable que se produzcan ciclos como éste. En efecto, es fácil comprender que si en el seno de un conjunto de 100 números se efectúan más de 100 operaciones, al menos uno de los números habrá de repetirse; el primero de los números que se repita engendrará un ciclo periódico. Hay un precioso programa, que apenas requiere memoria, que permite detectar los bucles, pero de él se hablará más tarde.

Basta una hora para representar en un diagrama los resultados de este proceso de elevación al cuadrado y truncamiento. Representemos a cada uno de los números, de 0 a 99, mediante un punto dibujado en una hoja de papel. Si el proceso de elevación lleva de un número a otro distinto, se unen los correspondientes puntos mediante una flecha. Por ejemplo, habría que trazar una flecha que fuera desde el punto 59 al 81. Las primeras conexiones del diagrama pueden producir ya ciclos entremezclados; por ello, es conveniente volver a dibujarlos de cuando en cuando, procurando que no haya flechas que se crucen. Siempre es posible trazar un diagrama de las iteraciones desprovisto de cruces e intersecciones.

Se puede ir más lejos todavía. Con frecuencia surgen subdiagramas separados, que cabe mostrar de modo que hagan resaltar algunas de las simetrías surgidas de las iteraciones. Por ejemplo, el diagrama de iteración correspondiente a los cuadrados de los enteros que van de 0 a 99 puede trazarse mediante seis subdiagramas desconectados entre sí, y que no se cortan ni enredan unos con otros. Las seis piezas aparecen por pares idénticos; cada pieza presenta gran simetría [*véase la figura 6*]. ¿Podrá el lector explicar el porqué de tal simetría? ¿Qué ocurriría si en lugar de éstos se utilizasen los enteros de 0 a 119? ¿Existe relación entre el número de piezas desconectadas de que consta el diagrama y el máximo de los enteros que componen la sucesión?

Algunos de los números complejos del conjunto de Mandelbrot obedecen a pautas de iteración similares. Para determinados valores de c, las iteraciones repetidas de la transformación $z^2 + c$ pueden producir ciclos periódicos, finitos, de números complejos. Por ejemplo, el complejo $0 + 1i$ genera una oscilación indefinida entre los los dos números complejos $-1 + 1i$ y $0 - 1i$. Puede incluso que el ciclo contenga tan sólo un número. Estos conjuntos cíclicos, ya se encuentren en un conjunto finito, ya en el conjunto infinito de Mandelbrot, se llaman atractores.

Cada una de las seis piezas del diagrama de iteración correspondiente a los enteros de 0 a 99 contiene un atractor. Geométricamente, el atractor puede representarse mediante un polígono, y los conjuntos de números que conducen a él, en forma de grafo arbóreo.

Un procedimiento para hallar atractores mediante ordenador consiste en almacenar cada uno de los números recién generados en una tabla especialmente diseñada para ello. El número recién calculado se compara con los previamente almacenados en la tabla. En cuanto se produce una coincidencia, se imprimen todos los números que figuran en la tabla, desde el punto de coincidencia en adelante, hasta el número recién engendrado. Es un método directo y fácil de programar. Pero si la tabla es grande, puede exigir tiempos muy largos. Para descubrir un ciclo atractor contenido en una tabla formada por n números hacen falta del orden de n^2 comparaciones; en efecto, puede ser necesario comparar cada uno de los nuevos números con hasta el máximo de los n números de la tabla.

Hay un sagaz programita que permite hallar atractores mucho más rápidamente. El programa no requiere n palabras de memoria, sino tan sólo dos, y puede codificarse hasta en la más sencilla de las calculadoras programables. El programa figura en un notable libro titulado *Mathematical Recreations for the Programmable Calculator*, de Dean Hoffman, de la Universidad de Auburn, y Lee Mohler, de la Universidad de Alabama. Inútil decir que muchos de los problemas tratados en el libro pueden adaptarse sin dificultad a programas de ordenador.

El programa se llama RHOP, porque la secuencia de números que acaba finalmente por repetirse cíclicamente recuerda a un trozo de cuerda (*rope*, en inglés) con un lazo o bucle (*loop*) en su extremo. Esta figura recuerda también la forma de la letra griega ρ (rho). El programa se vale de dos variables, que llamaremos *lento* y *rápido*. Al comenzar, se les atribuye a las dos variables el valor del número inicial. El ciclo iterativo del programa consta exactamente de tres instrucciones:

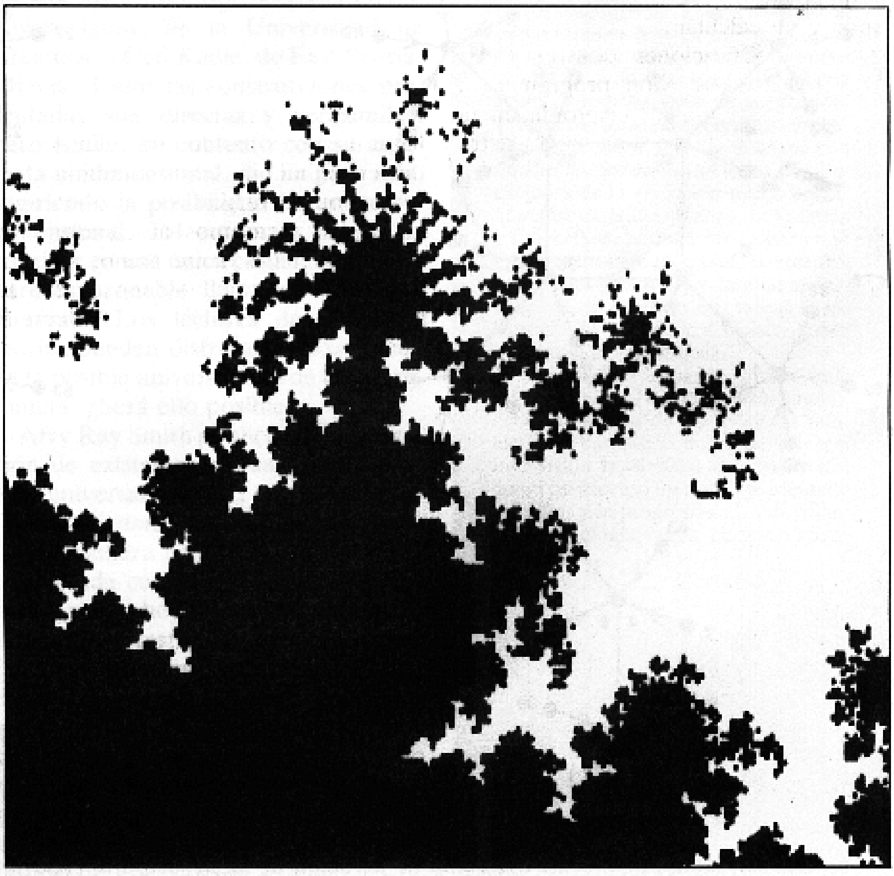
rápido ← *rápido* × *rápido* (mod 100)
rápido ← *rápido* × *rápido* (mod 100)
lento ← *lento* × *lento* (mod 100)

La operación mod 100 separa las dos últimas cifras de los productos. Fijémonos en que la elevación al cuadrado se efectúa por dos veces sobre el número *rápido*, pero tan sólo una sobre *lento*. *Rápido* se abre paso velozmente desde la cola a la cabeza de la rho a doble paso que *lento*. Ya en la cabeza, *rápido* alcanza a *lento* cuando éste ha recorrido parte de ella. El programa abandona el ciclo iterativo en cuanto *rápido* coincide con *lento*.

El atractor se detecta reiterando el proceso de elevación al cuadrado sobre el número que actualmente está asignado a *lento*. Cuando tal número se repite, se detiene la ejecución del programa y se imprime la secuencia de números que interviene desde el número hasta su repetición.

Me encantaría ver diagramas preparados por los lectores que explorasen los efectos de la elevación y truncamiento iterativos en dominios finitos de tamaño variable. Los diagramas pueden confeccionarse mediante ordenador o, también, manualmente. La iteración en dominios discretos es campo matemático recientemente roturado, con aplicaciones en informática, biomatemática, física y sociología. Los teóricos pueden esperar a que aparezca un libro sobre la materia, cuyo autor es François Robert, de la Universidad de Grenoble.

Los seres bidimensionales que pueblan el planeta Arde están agradecidos de corazón a los muchos lectores



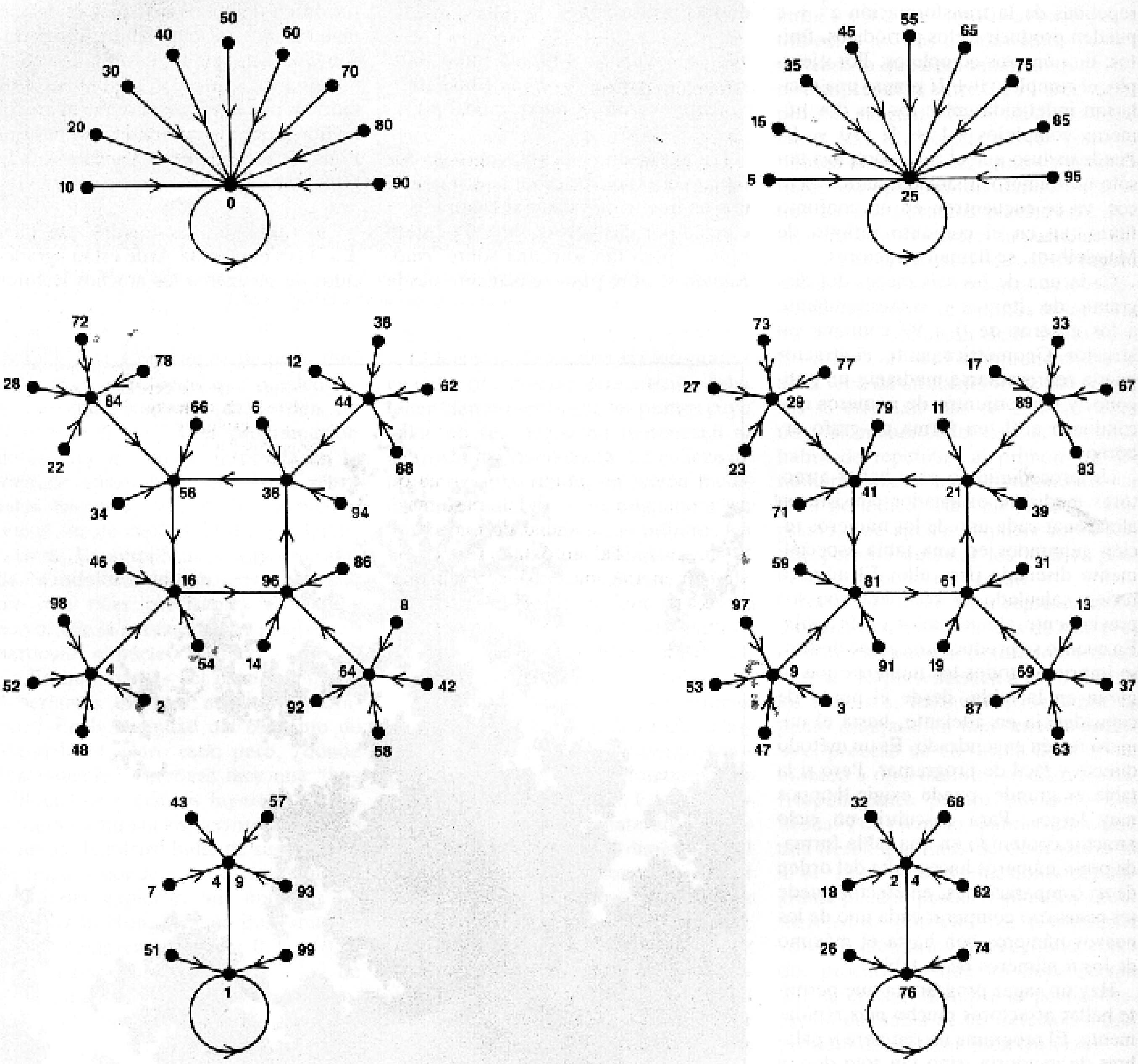
5. Un Mandelbrot miniatura, puntilleado, generado en un monitor monocromo que se esforzaron en mejorar el circuito de cruce de señales, que describí en el artículo de julio. Constaba aquél de 12 puertas No-Y de dos entradas, y pedía yo a los lectores que hallasen el número mínimo de puertas No-Y (y precisamente, No-Y) necesarias para construir un tal circuito de cruce. La mayoría de los circuitos presentados redujeron el número a 10 puertas, lo que supone una cierta ventaja; tres lectores consiguieron resolver el circuito de cruce con ocho puertas [*véase la figura 7*].

En este circuito de ocho puertas, una de ellas es No-Y de triple entrada y, dos, No-Y de única entrada. Estas últimas actúan como inversoras, convirtiendo una señal 0 en una señal 1, y viceversa. Los tres lectores que dieron con la solución de ocho puertas son Eric D. Carlson, de Cambridge, Massachussetts, Dale C. Koepo, de San José, California, y Steve Sullivan, de Beaverton, Oregon. Ya he dado cuenta de sus nombres, y del circuito perfeccionado, a mis amigos ardeanos. Créase o no, ese mismo circuito de cruce se patentó el 26 de abril de 1966 en los Estados Unidos. Robert L. Frank, consultor de sistemas de Birmingham, Michigan, escribió informándome de que la patente estaba reconocida a Lester M. Spandorfer, de Cheltenham, Pennsylvania, Albert B. Tonik, de Dresher, Pennsylvania, y Shimon Even, de Cambridge, Massachusetts.

Parece lógico preguntarse si el circuito se utiliza realmente en alguno de los dispositivos de nuestros días. También es natural preguntarse si existe algún "cruzador" más pequeño con puertas No-Y. Yo supongo que no.

C. Walter Johnson, de Long Beach, California, me escribió detallándome una variedad de circuitos planares que se valen de diversos tipos de puertas. Al parecer, no sólo pueden construirse circuitos cruzadores bidimensionales sino, también, básculas, o circuitos flip-flop, planares. Las básculas proporcionarían memoria viva para un ordenador bidimensional.

Stephen Wolfram, del Institute for Advanced Research, de Princeton, ha estudiado ordenadores unidimensionales, en forma de autómatas celulares. Es demasiado pronto para decir qué pueden haber aportado los lectores a este campo, tras la aparición de la "Glider Gun Guidelines" ("Indicaciones

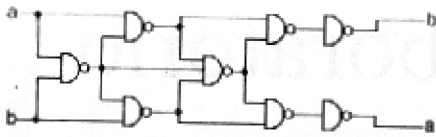


6. Las seis componentes del diagrama de iteración de la elevación al cuadrado de los 100 primeros números enteros para un cañón lanzapatines") de Wolfram, pero puedo dar noticia de algunas reacciones iniciales. Un pecado de comisión hizo que algunos lectores se despistaran en persecución de deslizadores en el autómata que denominamos "792 ternario".

Wolfram y yo pretendíamos decir "357 ternario". Un pecado de omisión, mío esta vez, consistió en no mencionar al autómata lineal del que se sabe es capaz de computación universal. Estuve yo considerando la posibilidad de describir un tal autómata lineal, el primero de los cuales lo ideó Alvy Ray Smith, en 1970. En aquella época, Smith era estudiante de segundo ciclo de la Universidad de Stanford. Temía yo que la descripción del autómata lineal universal de Smith complicase excesivamente el artículo, pues el autómata tiene 18 estados ($k = 18$) y entornos tricelulares ($r = 1$).

Arthur L. Rubin, de Los Angeles, ha presentado una razonable sugerencia al respecto de la velocidad de la luz en autómatas lineales arbitrarios. Propone Rubin corregir un defecto de la definición hasta ahora utilizada, que establecía que la velocidad de la luz era igual a una celdilla por unidad de tiempo. La antigua definición pasa por alto la posibilidad de que haya autómatas lineales que no puedan alcanzar tales velocidades. La velocidad de la luz, en la versión corregida, es "la velocidad máxima de propagación de un impulso cualquiera (hacia la derecha, por ejemplo)". El frente de progresión del impulso está definido por la condición de que a su derecha tan sólo pueda haber ceros. A continuación, Rubin procede a demostrar que la velocidad de la luz en el autómata "792 ternario" es de un tercio.

En mi artículo de julio preguntaba yo si el autómata lineal llamado "Rizo" admitía un cañón lanzapatines unidireccional. Los patines disparados por un tal cañón habrían de propagarse indefinidamente hacia la derecha, pero nunca hacia la izquierda. William B. Lipp, de Milford, Connecticut, ha dado un sencillo y encantador razonamiento contrario a la existencia de un tal cañón. Escribe Lipp: "Imaginemos una configuración que jamás tenga valores distintos de cero situados a la izquierda de un bloque, que rotularemos 0. Fijémonos en que el valor no nulo situado en posición izquierda extrema de la configuración tiene siempre que ser un 1. Si fuera un 2, este 2 levantaría un rizo, que se propagaría indefinidamente hacia la izquierda, contradiciendo la suposición de que no hay elementos



7. Circuito "cruzador" resuelto con ocho puertas **no-y**

distintos de cero a la izquierda del bloque 0. Ahora, el 1 situado en izquierda extrema tiene que convertirse en un 0 en el próximo ciclo, haciendo así que el límite izquierdo de la configuración se desplace, por lo menos, un bloque hacia la derecha". Así pues, o bien un deslizador crea un rizo hacia la izquierda, o bien su cañón será devorado por ceros.

Otros lectores buscaron demostrar que Rizo no tiene capacidad de computación universal. Para algunos autómatas puede demostrarse una condición suficiente, a saber, que el problema de detención del autómata es decidible. Rizo se detiene cuando todas sus casillas contienen ceros, pero las condiciones de detención para cualquiera de las máquinas universales que pudiera contener podrían ser muy diferentes.

Diversos lectores trataron de construir autómatas lineales provistos de capacidad de computación universal; entre ellos, Frank Adams, de East Hartford, Connecticut, Jonathan Amsterdam, de Cambridge, Massachusetts, Kiyosi Igusa, de la Universidad de Brandeis, y Carl Kadie, de East Peoria, Illinois. Todas las construcciones presentadas son directas y verosímiles, pero Kadie, no contento con su autómata unidimensional, dio un paso más, sugiriendo la posibilidad de uno cerodimensional. Tal autómata habría de consistir en una única casilla, por lo que parece razonable llamarlo "autómata puntual". Los lectores de tendencia teórica pueden disfrutar reflexionando en la posible universalidad de un tal autómata. ¿Será ello posible?

Alvy Ray Smith publicó su demostración de existencia de un autómata lineal universal en 1971, en el *Journal of the Association of Computing Machinery*. Se pudiera pensar que una carrera inaugurada con tan prometedores auspicios estaría hoy floreciendo en alguna renombrada institución académica. Ha florecido, pero en muy otro ambiente. Smith es director de investigación de gráficos generados por ordenador de la compañía Lucasfilm, Ltd. Confío poder dar cuenta, en algún artículo futuro, de algunos de los fantásticos efectos cinemáticos producidos en el laboratorio de Lucasfilm.