Juegos de ordenador

Un microscopio computarizado escudriña el objeto más complejo de la matemática

A.K. Dewdney

El conjunto de Mandelbrot cavila, en silente complejidad, en el centro de una vasta lámina bidimensional de números, llamada plano complejo. Cuando a estos números se les aplica reiteradamente una cierta operación, los situados en el exterior del conjunto huyen, despavoridos, hacia el infinito. Los números del interior permanecen en él, donde danzan y vagabundean de un lado a otro. En la proximidad de la frontera, erráticos vaivenes de minuciosa coreografía, señalan el comienzo de la inestabilidad. Acontece aquí una infinita regresión de minucioso detalle, que nos deja estupefactos por su variedad, su complejidad y su insólita belleza.

El conjunto recibe su nombre en honor de Benoit B. Mandelbrot, investigador numerario del Centro de Investigación Thomas J. Watson de la IBM en Yorktown Heights, Nueva York. A partir de sus trabajos con formas geométricas, Mandelbrot ha desarrollado un campo llamado geometría fractal, estudio matemático de formas que tienen dimensión fraccionaria. En particular, la frontera del conjunto de Mandelbrot es una fractal, aunque también es mucho más.

Merced a un programa relativamente sencillo, un ordenador puede convertirse en una especie de microscopio con el que observar la frontera del conjunto de Mandelbrot. En teoría, se puede escudriñar cualquier porción del conjunto, y hacerlo con tanta aproximación como se quiera [*véase la portada de este número y las figuras 1 a 3*]. Desde la lejanía, el conjunto recuerda un ocho gordezuelo, yacente sobre un costado y cubierto de verrugas. El interior de la figura es de negrura siniestra; la envuelve un halo blanco azulado, como de arco eléctrico, que va dando paso a azules cada vez más profundos y a bandas negras, conforme nos adentramos en los dominios más exteriores del plano.

Al acercarnos al conjunto de Mandelbrot, descubrimos que cada verruga es una diminuta figura de forma muy similar a la del conjunto paterno. Sin embargo, al hacer *zoom* con nuestro microscopio, para observar con más detalle estas diminutas figurillas, se abre ante nosotros un motivo de muy diferente diseño: una lujuriante orgía de zarcillos y volutas de aspecto orgánico, que se abren en espiras y verticilos y en hileras. Al amplificar una voluta se nos revela todavía una nueva escena: la voluta está formada por pares de verticilos entrelazados por puentes de filigrana. La ampliación del puente muestra otras dos espiras que brotan de su centro. En el centro de este centro, por así decirlo, se encuentra un puente cuádruple con cuatro volutas más, y en el centro de éstas, otra versión del conjunto de Mandelbrot.

Mas la versión amplificada no es del todo igual al conjunto de Mandelbrot. Al seguir amplificando parecen ir reapareciendo objetos similares, en los que una inspección minuciosa revela siempre nuevas diferencias. La situación prosigue indefinidamente, siempre igual, siempre infinitamente diferente y sobrecogedoramente encantadora.

Describiré aquí dos programas de ordenador, que exploran ambos los efectos de la iteración de operaciones como la que engendra al conjunto de Mandelbrot. El primero de estos programas generó las ilustraciones en color que vemos en el artículo de este mes. El programa puede ejecutarse en ordenadores personales que dispongan de programación y material adecuados para la generación de gráficos. El programa generará imágenes satisfactorias aun cuando solamente se tenga acceso a un sistema monocromo. El segundo programa está dirigido a lectores que, como yo, tengan necesidad de un ocasional retiro, y abandonando las complejidades sin cuento de lo infinito, busquen refugio en la aparente simplicidad de lo finito.

El término "complejo" se utiliza aquí con dos significados. El ordinario es, evidentemente, adecuado para describir el conjunto de Mandelbrot. Pero el término tiene también un segundo sentido, más técnico. Un número es complejo cuando consta de dos partes, que por razones históricas se llaman "parte real" y "parte imaginaria". Estas expresiones carecen hoy de significado especial; las dos partes de un número complejo podrían muy bien llamarse "abscisa" y "ordenada". Así pues, $7 + 4i$ es un número complejo, cuya parte real es 7 (abscisa) y cuya parte imaginaria es 4 (ordenada). La letra i latina que sigue inmediatamente al 4 expresa cuál de los dos términos del número complejo es la parte imaginaria.

Todo número complejo puede representarse mediante un punto del plano; y recíprocamente. Cuando se establece esta correspondencia entre puntos y números, se habla del plano complejo. Para situar a $7 + 4i$ en el plano complejo se parte del número complejo 0, que es $0 + 0i$, y se toman siete unidades hacia el este, y cuatro hacia el norte. El punto resultante representa $7 + 4i$. El plano complejo es una infinidad no numerable de tales números. Sus partes reales e imaginarias tanto pueden ser positivas como negativas, y lo mismo ser números enteros que expresiones decimales.

La adición y la multiplicación de números complejos es sencilla. Para sumar $3 - 2i$ con $7 + 4i$ se suman por separado las partes reales y las partes imaginarias; en nuestro ejemplo, la suma es $10 + 2i$. La multiplicación de números complejos apenas si es un poco más difícil. Por ejemplo, si se manejase el símbolo i de igual modo que la x del álgebra ordinaria, el producto de $3 - 2i$ por $7 + 4i$ sería $21 + 12i - 14i - 8i^2$. En este momento entra en juego una especialísima propiedad del símbolo i: ocurre que $i^2 = -1$. La expresión desarrollada se puede entonces simplificar, reduciendo términos semejantes, y da $29 - 2i$.

Cabe ahora describir el proceso iterativo que engendra al conjunto de Mandelbrot. Se parte de la expresión $z^2 + c$, donde z es un número complejo que puede tomar distintos valores (una variable), y c es un cierto número complejo fijo. Hagamos, inicialmente, que z sea igual al número complejo 0. El cuadrado de z es estonces 0, y el resultado de sumarle c a z^2 es, sencillamente, c. Ahora sustituyamos por el valor así obtenido la z de la expresión $z^2 + c$. La nueva suma es $c^2 + c$. Volvamos a sustituir la z por este valor. La suma siguiente es $(c^2 + c)^2 + c$. Prosigamos con este proceso, tomando siempre el resultado del último cálculo como valor inicial para el nuevo.

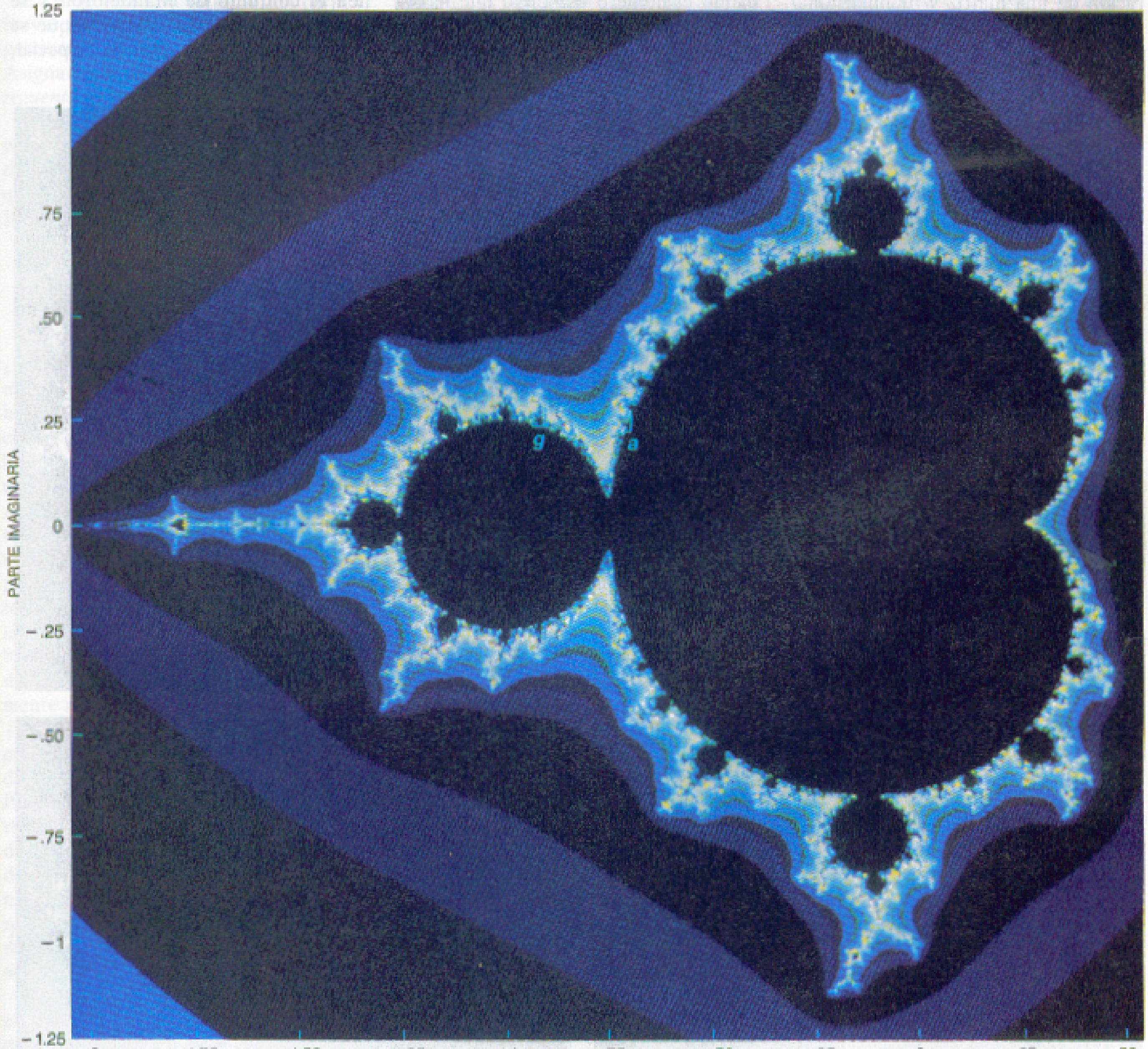
Al realizar las iteraciones para valores particulares de c ocurren cosas extraordinarias. He aquí, por ejemplo, lo que sucede cuando c es $1 + i$:

primera iteración, $1 + i$
segunda iteración, $-7 + 7i$
tercera iteración, $1 - 97i$

Fijémonos en que las partes real e imaginaria pueden crecer, decrecer o cambiar de signo. Cuando el proceso de iteración prosigue, en este caso concreto, indefinidamente, los números complejos resultantes van haciéndose progresivamente mayores.

Mas, ¿qué se quiere decir, exactamente, al hablar de tamaño de un número complejo? Dado que los números complejos se corresponden con puntos del plano complejo, podemos aplicar aquí la noción de distancia. El tamaño de un número complejo, o como se le llama en matemáticas, su *módulo*, es sencillamente su distancia al número complejo 0. Tal distancia es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son las partes real e imaginaria del número complejo. Así pues, para hallar el tamaño, o módulo, del número, se elevan al cuadrado sus partes real e imaginaria, se suman estos cuadrados y se extrae la raíz cuadrada de esta suma. Por ejemplo, el tamaño del número complejo $7 + 4i$ es la raíz cuadrada de $7^2 + 4^2$, aproximadamente 8,062. Cuando los números complejos, merced al proceso iterativo que acabo de describir, alcanzan un cierto tamaño, crecen después muy rápidamente; tanto así, que tras unas cuantas iteraciones más, rebasan la capacidad de cualquier ordenador.

Afortunadamente, podemos despreciar todos los números que huyen chillando despavoridos hacia el infinito. El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de todos los números complejos c para los cuales el tamaño de $z^2 + c$ permanece acotado, esto es, sus infinitas iteraciones pueden quedar todas encerradas



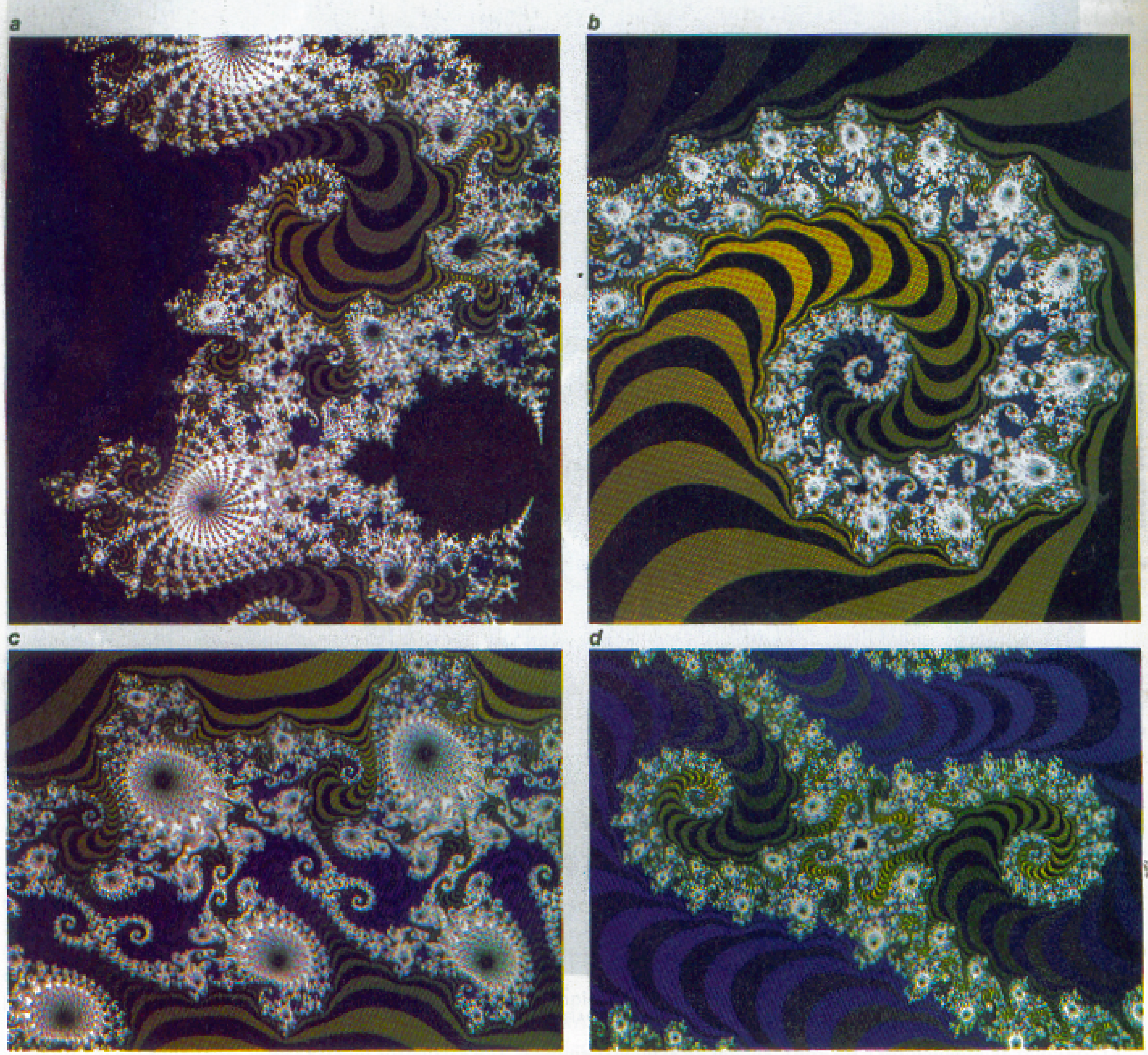
1. El conjunto de Mandelbrot y sus coordenadas en el plano complejo. Los recuadros pueden verse, ampliados, en la portada y en las tres páginas siguientes en un círculo. El programa que me dispongo a describir efectúa una búsqueda de tales números. Estoy en deuda con John H. Hubbard, matemático de la Universidad de Cornell, por todo cuanto sigue. Hubbard es una autoridad en el conjunto de Mandelbrot, y ha sido uno de los primeros en crear imágenes de él generadas por ordenador. Casi todas las que aquí se presentan fueron realizadas por Heinz Otto Peitgen y sus colaboradores, en la Universidad de Bremen. Peitgen aprendió de Hubbard este arte.

El programa de Hubbard ha inspirado un programa que yo llamo MANDELZOOM. Comienza con la preparación de una matriz y bidimensional, la llamada *imagen*, necesaria para almacenar y conservar las imágenes en ella. Los elementos de esta tabla son elementos individuales de la imagen a mostrar, llamados *píxeles*, dispuestos en formación rectangular. Hubbard utiliza una tabla de 400 filas por 400 columnas; la de Peitgen es todavía mayor. Los lectores que deseen adaptar MANDELZOOM para su uso personal, deberán definir una matriz acorde con su equipo y temperamento. Cuanto mayor sea la matriz, tanto más larga la espera, aunque también mayor la resolución y detalle de las imágenes.

En la primera parte de MANDELZOOM se puede seleccionar, a fin de examinarla, cualquier porción del plano complejo. Se especifica el ángulo inferior izquierdo del recuadro a estudiar dando el número complejo que le corresponde. Dos de las variables del programa, *avértice* y *bvértice*, permiten proporcionar, respectivamente, las partes real e imaginaria del número. La longitud de cada uno de los lados del recuadro se especifica mediante variables *lado*.

La segunda parte del programa sirve para ajustar la matriz *imagen* a fin de adaptarla al recuadro que interese; para ello se calcula el valor de una variable llamada *vano*. *Vano* es la distancia que, dentro del cuadrado, media entre dos píxeles adyacentes. Para calcular el valor de *vano* se divide *lado* entre el número de filas y de columnas de que conste *imagen*.

El alma del programa es su tercera parte. Se hace en ella la búsqueda de los números complejos *c* que componen el conjunto de Mandelbrot, y se asignan colores a los números que se encuentren, en un sentido especial,



2. Sucesivas ampliaciones del "recodo del pastor" situado en la región **a** *de la figura 1* próximos. El procedimiento tiene que determinarse una vez por cada elemento de imagen, o píxel, y, por consiguiente, la matriz de 400 por 400 que utiliza Hubbard exige 160.000 cómputos independientes. Supongamos que el programa se encuentre actualmente trabajando en la fila *m* y la columna *n*. La tercera parte se descompone en cuatro pasos:

1. Calcular un número complejo *c* que se supone que representa al píxel: súmese $n \times vano$ al valor de *avértice*, a fin de calcular la parte real de *c*, que será denotada *ac*; súmese $m \times vano$ a *bvértice*, para hallar la parte imaginaria *bc* de *c*. No es necesario que *i* intervenga en el programa.

2. Asignar a una variable compleja *z* (cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente, *az* y *bz*) el valor $0 + 0i$. Asignar a una variable entera llamada *recuento* el valor 0.

3. Efectuar repetidamente los tres pasos siguientes hasta que, o bien el módulo de *z* sea mayor que 2, o hasta que la variable recuento rebase el valor 1000; lo que antes se produzca:

$$z \leftarrow z^2 + c$$
$$recuento \leftarrow recuento + 1$$
$$módulo \leftarrow \text{módulo de } z$$

¿A qué se debe la gran importancia del número 2? Un resultado inmediato de la teoría de iteraciones de transformaciones complejas permite asegurar que las iteraciones de *z* divergen hacia infinito si, y solamente si, en alguna de las etapas del proceso iterativo, *z* llega a tener módulos mayor o igual que 2. Resulta que una elevada proporción de puntos, cuyo destino final es el infinito, rebasan ya en unas cuantas iteraciones la cota 2. Conforme aumenta la variable *recuento*, los parientes más lentos de aquéllos van haciéndose progresivamente más raros.

4. Asignación de un color a *imagen(m,n)*, en función del valor alcanzado por *recuento* al finalizar el paso 3. Presentación en la pantalla del píxel correspondiente. Obsérvese que el color de un píxel tan sólo es función de uno de los números de su diminuto dominio, a saber, el situado en su vértice noreste; el comportamiento de ese número representa entonces el comportamiento del píxel entero.

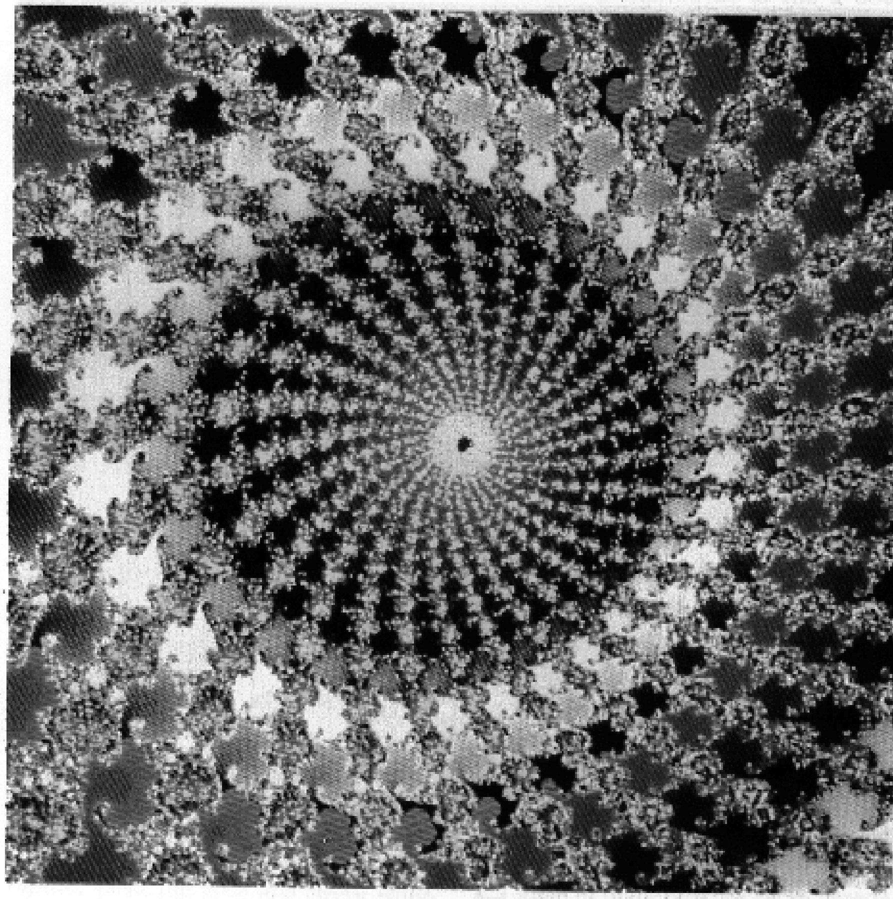
El plan de asignación de colores exige agrupar en subgamas el intervalo de valores que *recuento* haya alcanzado en la matriz; a cada subgama se le asigna entonces un único color. Aquellos píxeles cuyas correspondientes *z* rebasen la cota 2 en unas pocas iteraciones se colorearán de rojo. Aquellos otros cuyas *z* no lleguen al módulo 2, sino tras relativamente muchas iteraciones, se tiñen de violeta, que es el otro extremo del espectro cromático. Y los píxeles para los cuales el módulo de *z* se conserva inferior a 2, aun después de 1000 iteraciones, se consideran pertenecientes al conjunto de Mandelbrot, y deben colorearse de negro.

Es prudente dejar sin especificar los colores en tanto no se haya determinado el intervalo de valores que tomará *recuento* en el recuadro que se esté estudiando. Cuando ese intervalo sea estrecho, puede repartirse en él la totalidad de los colores del espectro. Así pues, Hubbard sugiere que en el paso 4 solamente se asigne a cada elemento de la matriz *imagen* el valor correspondiente de *recuento*. Un programa independiente puede encargarse después de inspeccionar la matriz, determinar los valores mínimo y máximo que en ella alcanza *recuento* y luego distribuir el espectro de colores de conformidad con los valores obtenidos. Quienes hayan llegado hasta aquí podrán, a no dudar, idear planteamientos viables.

Los lectores que carezcan de monitor de color pueden participar también, y hacerlo en blanco y negro. Aquellos números complejos para los cuales el módulo de *z* llegue a ser mayor que 2 antes de *r* iteraciones se colorean de blanco; los restantes, de negro. El valor de *r* puede ajustarse a voluntad. Para no esperar noches enteras los resultados del programa, la matriz puede hacerse de, pongamos por caso, 100 filas por 100 columnas. Hubbard supone que es perfectamente razonable reducir de 1000 a 100 el número máximo de iteraciones por punto. El fruto de tal programa es una sugestiva imagen puntillleada de su homóloga en color [*véase la figura 5*].

¿Qué potencia de ampliación tienen las "lentes" de un ordenador personal? Depende hasta cierto punto del tamaño efectivo de los números que la máquina sea capaz de manipular. Por ejemplo, según Magi (mi amanuense de microinformática en la Universidad de Western Ontario) el IBM PC utiliza el microprocesador 8088, un microcircuito manufacturado por Intel Corporation, diseñado para manipular datos de 16 bits. Una técnica llamada "de precisión doble" permite aumentar la longitud de cada número

e



3. Un ojo compuesto mira curioso desde una región de la imagen d de la figura 2