actúan como multiplicadores que elevan las fluctuaciones microscópicas a una expresión macroscópica. Esto explica por qué no existen las soluciones exactas, los atajos para predecir el futuro. Tras un breve período, la incertidumbre incluida en la medición inicial cubre el atractor por entero y se pierde toda capacidad predictiva: simplemente no hay conexión causal entre el pasado y el futuro.

Los atractores caóticos funcionan localmente como amplificadores de ruido. Una fluctuación pequeña, debida quizás a la agitación térmica, causará una gran desviación en la posición de la órbita poco después. Pero hay un aspecto importante en el que los atractores caóticos difieren de los simples amplificadores de ruido. Debido a que las operaciones de estirar y plegar son repetitivas y continuas, cualquier minúscula fluctuación acabará por dominar el movimiento; así, el comportamiento cualitativo es independiente del nivel de ruido. Por ello, los sistemas caóticos no pueden "sosegarse", bajando la temperatura, por ejemplo. Generan azar por sí mismos, sin necesidad de influencias aleatorias externas. Su comportamiento aleatorio se debe a algo más que a la amplificación de los errores y a la pérdida de la capacidad de predecir; se origina por la complejidad de las órbitas generadas por el estirado y el plegado.

Conviene advertir que tanto el comportamiento caótico como el no caótico pueden darse en sistemas sin disipaciones en los que la energía se conserva. En ellos, las órbitas no se relajan hacia un atractor, sino que están confinadas en una superficie de energía. Sin embargo, la disipación es importante en muchos, si no en la mayoría, de los sistemas de mundo real, y cabe esperar que el concepto de atractor sea de utilidad general.

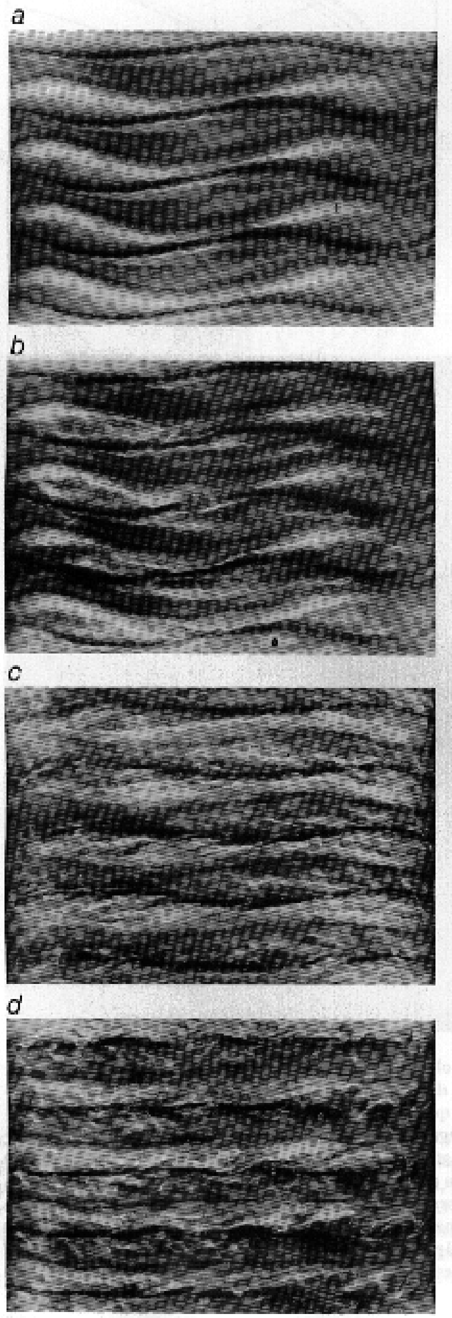
Los atractores caóticos de pocas dimensiones abren un nuevo campo en la teoría de los sistemas dinámicos. Pero debe cuestionarse su relevancia en relación con la aleatoriedad observada en los sistemas físicos. La primera prueba experimental en favor de la hipótesis según la cual los atractores caóticos fundan el movimiento estocástico de los fluidos fue más bien indirecta. El experimento fue realizado, en 1974, por Jerry P. Gollub, del Haverford College, y Harry L. Swinney, de la Universidad de Texas en Austin. La prueba resultó ser indirecta, porque los investigadores no se concentraron en el atractor en sí, sino en las propiedades estadísticas que lo caracterizan.

El sistema que examinaron era una célula de Couette: formada por dos cilindros concéntricos. El espacio entre ellos se llena con un fluido y uno de los cilindros, o ambos, giran con una velocidad angular fija. Según aumenta la velocidad angular, el fluido exhibe pautas de comportamiento progresivamente más complejas, con una dependencia temporal complicada [*véase la figura 8*]. Lo que hicieron Gollub y Swinney fue, esencialmente, medir la velocidad del fluido en un punto dado. Al incrementar la velocidad de rotación, observaron transiciones desde una velocidad constante en el tiempo hasta otra que variaba periódicamente y, finalmente, a otra velocidad variable de forma aperiódica. Esta transición al movimiento aperiódico constituía el punto central del experimento.

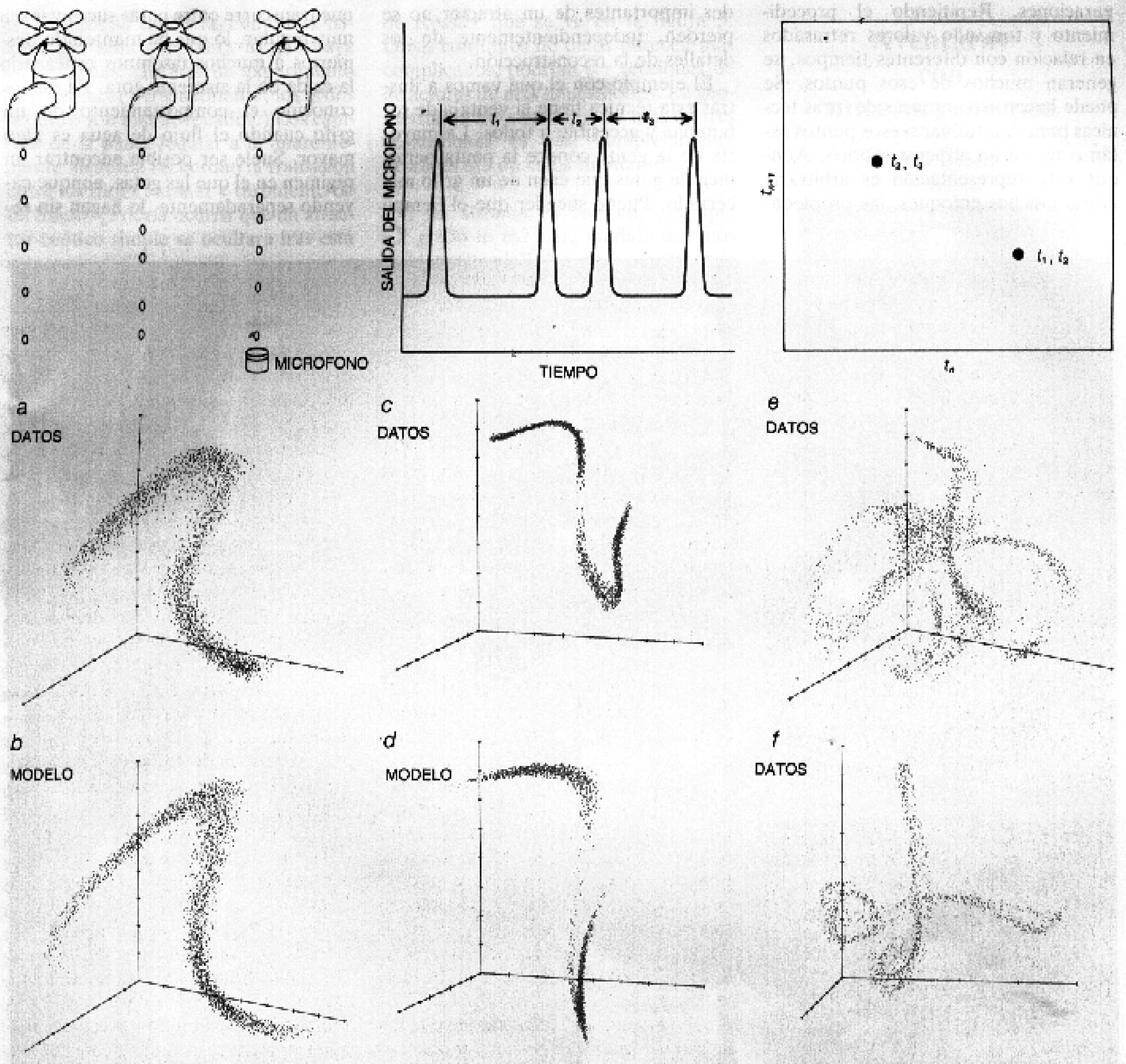
El experimento se había diseñado para decidir entre dos concepciones teóricas que predecían diferentes esquemas de comportamiento del fluido a medida que cambiaba la velocidad de rotación. La teoría de Landau del movimiento aleatorio de un fluido predecía que, al incrementar la rotación, se excitaría un número siempre creciente de oscilaciones independientes del fluido. El atractor asociado sería un toro de muchas dimensiones. Esta concepción de Landau había sido puesta en duda por David Ruelle, del Instituto de Altos Estudios Científicos de París, y Floris Takens, de la Universidad holandesa de Groningen. Adujeron argumentos matemáticos de los que se intuía que era poco probable que el atractor asociado con las ideas de Landau apareciera en el movimiento de un fluido. Por el contrario, sus resultados indicaban que cualquier toro de muchas dimensiones debería originar un atractor caótico, como había postulado Lorenz.

Gollub y Swinney encontraron que, para velocidades de rotación bajas, el flujo del fluido no cambiaba con el tiempo: el atractor subyacente era un punto fijo. Al aumentar la velocidad, el agua empezaba a oscilar con una frecuencia independiente que correspondía a un ciclo límite atractor (una órbita periódica), y si la velocidad de rotación se aumentaba aún más, la oscilación presentaba dos frecuencias independientes, lo que indicaba la existencia de un toro bidimensional atractor. La teoría de Landau predecía que, conforme se aumentara la velocidad de rotación, la pauta debería continuar: aparecerían gradualmente más y más frecuencias distintas. Pero no ocurría así. Más allá de una velocidad crítica de rotación, aparecía de repente una banda continua de frecuencias. Esta observación era coherente con el "flujo determinista no periódico" de Lorenz, corroborando la idea de que los atractores caóticos subyacían en la turbulencia de los fluidos.

Aunque el análisis de Gollub y Swinney apoyaba la idea de que los atractores caóticos estaban detrás del mo-



8. COMPROBACION EXPERIMENTAL en apoyo de la hipótesis según la cual los atractores caóticos están en la base de algunas clases de movimiento aleatorio de los fluidos. Se muestran aquí varias fotografías sucesivas del agua en una célula de Couette, que consiste en dos cilindros concéntricos. El espacio entre los dos cilindros se llena con agua y se provoca que el interior gire con una determinada velocidad angular (*a*). A medida que aumenta la velocidad angular, el fluido desarrolla una pauta de comportamiento progresivamente más compleja (*b*) que se torna irregular (*c*) y después caótica (*d*).



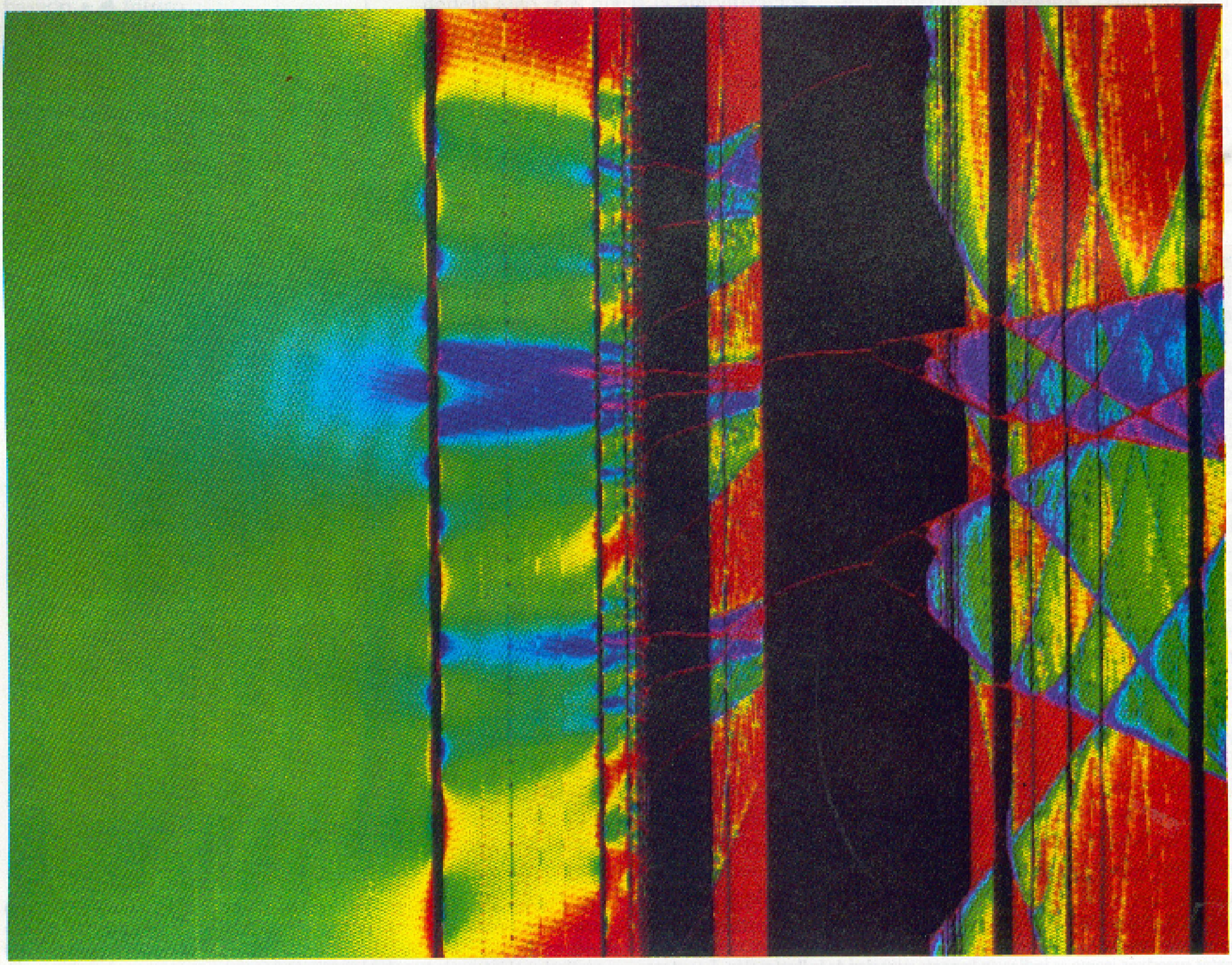
9. EJEMPLO DEL GRIFO QUE GOTEA para poner de manifiesto un sistema común susceptible de experimentar una transición caótica. El atractor subyacente se reconstruye representando los intervalos temporales entre cada par de gotas sucesivas, como se indica en la parte superior de la ilustración. Los atractores reconstruidos con un grifo real (*a*, *c*) se correlacionan favorablemente con variantes de la regla de Hénon (*b*, *d*). (El atractor de Hénon completo se muestra en la figura 7.) Las ilustraciones *e* y *f* se reconstruyeron a partir de elevados flujos de agua y revelan, probablemente, secciones de atractores caóticos no conocidos hasta ahora. En las gráficas se emplean intervalos temporales como coordenadas. La horizontal es t_n, intervalo temporal entre la gota *n* y la *n*-1. La vertical es el intervalo temporal siguiente, t_{n+1}, y la tercera coordenada, representada como si saliera de la página, es t_{n+2}. Cada punto corresponde así a un triplete de números (t_n, t_{n+1}, t_{n+2}) que se han representado para una muestra de 4094 datos. En las ilustraciones *b* y *d* se añadió un ruido de fondo simulado.

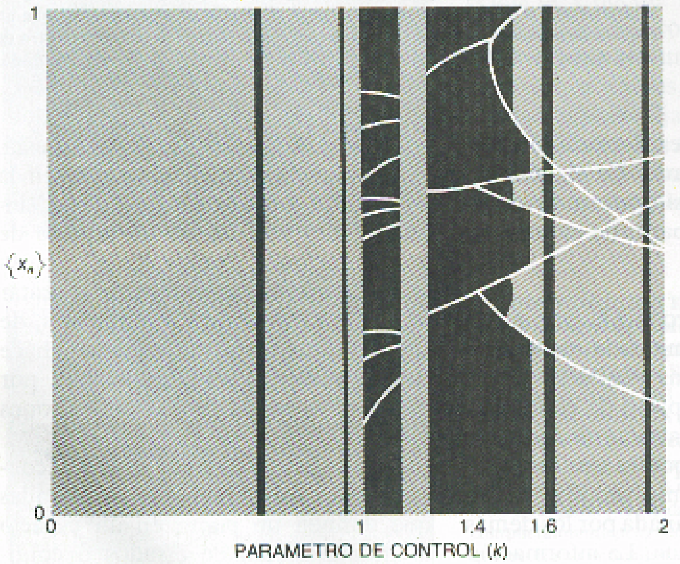
vimiento aleatorio de los fluidos, su trabajo distaba mucho de ser concluyente. Sería deseable demostrar explícitamente la existencia de un atractor caótico simple en los datos experimentales. Sin embargo, lo normal es que en un experimento no se registren todos los aspectos de un sistema, sino tan sólo unos pocos. Gollub y Swinney no podían registrar, por ejemplo, todo el flujo de Couette, sino solamente la velocidad en un punto. Es tarea del investigador "reconstruir" el atractor a partir de unos datos limitados. Está claro que ello no siempre se puede hacer; si el atractor es demasiado complicado, algo se pierde. En algunos casos, sin embargo, sí podemos reconstruir la dinámica a partir de un número reducido de datos.

Una técnica introducida por nosotros y fundamentada matemáticamente por Takens posibilitó la reconstrucción del espacio de configuraciones para buscar atractores caóticos. La idea matriz es que la evolución de cualquier componente singular de un sistema está determinada por los demás con los que interactúa. La información sobre los componentes relevantes está, pues, implícitamente contenida en la historia de cualquier componente singular. Para reconstruir un espacio de configuraciones "equivalente", basta con observar un componente y tratar los valores medidos a intervalos de tiempo fijos (hace un segundo, hace dos segundos, y así en adelante, por ejemplo) como si fueran dimensiones nuevas.

Esos valores retrasados pueden considerarse como nuevas coordenadas que definen un punto en un espacio multidimensional de estados o configuraciones. Repitiendo el procedimiento y tomando valores retrasados en relación con diferentes tiempos, se generan muchos de esos puntos. Se puede hacer uso entonces de otras técnicas para determinar si esos puntos están o no en un atractor caótico. Aunque esta representación es arbitraria desde muchos enfoques, las propiedades importantes de un atractor no se pierden, independientemente de los detalles de la reconstrucción.

El ejemplo con el que vamos a ilustrar esta técnica tiene la ventaja de ser familiar y accesible a todos. La mayoría de la gente conoce la pauta periódica de gotas que caen de un grifo mal cerrado. Puede suceder que el tiempo que transcurre entre gotas sucesivas sea muy regular, lo que ha mantenido despiertos a muchos insomnes esperando la caída de la siguiente gota. Es menos conocido el comportamiento de un grifo cuando el flujo de agua es algo mayor. Suele ser posible encontrar un régimen en el que las gotas, aunque cayendo separadamente, lo hagan sin re-





10. LA TRANSICION AL CAOS, esquematizada mediante un diagrama de bifurcación: una familia de atractores (*eje vertical*) en función de un parámetro de control (*eje horizontal*). El diagrama se generó con un sistema dinámico simple que transforma un número en otro. El sistema dinámico usado aquí se llama una aplicación de circunferencia y se especifica por la ecuación iterativa $x_{n+1} = w + x_n + k/2\pi \cdot \mathrm{sen}(2\pi x_n)$. Para cada valor del parámetro de control k, un ordenador dibujó el atractor correspondiente. Los colores codifican la probabilidad de encontrar puntos en el atractor: el rojo corresponde a las regiones frecuentemente visitadas; el verde, las que son visitadas con menor frecuencia y, el azul, las que sólo son raramente visitadas. Al incrementarse k desde 0 hasta 2 (*véase el dibujo de la izquierda*), el diagrama muestra dos caminos hacia el caos: una ruta cuasiperiódica (desde $k=0$ hasta $k=1$, que corresponde a la región verde de arriba) y una ruta de "duplicación del período" (desde $k=1{,}4$ a $k=2$). La ruta cuasiperiódica es matemáticamente equivalente a una órbita que pasa por un toro atractor. En la ruta de la duplicación del período, que se funda en atractores del tipo ciclo límite, las ramas aparecen por pares, siguiendo la serie geométrica 2, 4, 8, 16, 32, etc. Los iterados oscilan entre pares de ramas. (Para un valor concreto de k –1,4, por ejemplo– los iterados visitan sólo tres valores.) A k elevadas, esta "órbita triperiódica" se dobla para visitar seis valores. Luego se cuadriplica hasta doce, y así sucesivamente. Al final, la estructura de ramas se hace tan fina que aparece una estructura continua de bandas: se llega a un umbral tras el cual aparece el caos. (Ilustraciones de James P. Crutchfield.)

petir nunca su cadencia, como una batería que nunca repitiera lo que haya tocado antes. (Es éste un experimento fácil de hacer personalmente; los grifos sin filtro son más adecuados.) Los cambios de la pauta regular a la aparentemente aleatoria recuerdan la transición entre los flujos laminar y turbulento de un fluido. ¿Podría ocurrir que un atractor caótico simple se ocultara tras esta estocasticidad?

El estudio experimental de un grifo que gotea fue realizado en la Universidad de California en Santa Cruz por uno de nosotros (Shaw) en colaboración con Peter L. Scott, Stephen C. Pope y Philip J. Martein. La primera parte del experimento consistía en dejar caer las gotas de un grifo ordinario sobre un micrófono y medir los intervalos temporales entre los pulsos sonoros resultantes. Los resultados típicos de un experimento algo más refinado se muestran en la figura 9. Representando gráficamente pares de intervalos temporales, se obtiene una sección del atractor subyacente. En el régimen periódico, por ejemplo, los meniscos de los que caen las gotas se mueven de una forma suave y repetitiva, que podría representarse mediante un ciclo límite en el espacio de los estados. Pero este movimiento suave es inaccesible en el experimento real; lo único que se registra son los intervalos temporales entre la caída de cada gota. Viene a ser como aplicar una luz estroboscópica a un movimiento cíclico y regular. Si la sincronización es correcta, sólo se ve un punto fijo.

El interés del experimento creció cuando se encontraron atractores caóticos en el régimen no periódico del grifo que gotea. Podría haber ocurrido que la aleatoriedad de las gotas al caer se hubiese debido a influencias inobservadas, tales como pequeñas vibraciones o corrientes de aire. Si fuera así, no habría ninguna relación particular entre un intervalo y el siguiente, de modo que el gráfico de los datos tomados de dos en dos habría mostrado sólo una mancha sin ningún rasgo distintivo. El hecho de que en las gráficas aparezca siempre alguna estructura indica que la estocasticidad se apoya en un andamio determinista. Más concretamente, muchos conjuntos de datos muestran una forma de herradura que es la firma del sencillo proceso de estirado y plegado que expusimos antes. Esta forma característica sería una "instantánea" de un pliegue en progreso, por ejemplo el de una sección que rodee parcialmente el atractor de Rössler que se ve en la figura 5. Otros conjuntos de datos parecen más complicados; podrían ser secciones de atractores de más dimensiones. La geometría de los atractores de más de tres dimensiones es casi completamente desconocida en estos momentos.

Si un sistema es caótico, ¿en qué grado lo es? Una medida del caos es la "entropía" del movimiento, que viene a constituir el promedio del ritmo de estirado y plegado, o bien el promedio de la tasa con que se crea información. Otro dato estadístico es la "dimensión" del atractor. Si un sistema es simple, su comportamiento debería poder describirse mediante un atractor de pocas dimensiones en el espacio de configuraciones, tal como ocurre con los ejemplos citados en este artículo. Pueden ser necesarios varios números para especificar el estado de un sistema más complicado, con lo que el atractor correspondiente debería tener más dimensiones.

La técnica de la reconstrucción, combinada con mediciones de la entropía y de la dimensión, hace posible reconsiderar el flujo de fluido estudiado originalmente por Gollub y Swinney. Así lo hicieron varios miembros del grupo de Swinney, en colaboración con dos de nosotros (Crutchfield y Farmer). La técnica de reconstrucción nos permitió obtener imágenes del atractor subyacente. Imágenes que no demuestran claramente que haya un atractor de pocas dimensiones, como sucede con otros sistemas tales como el grifo que gotea. Sin embargo, las mediciones de la entropía y de la dimensión revelan que el movimiento irregular de un fluido, en el flujo de Couette cerca de la transición, se puede describir con atractores caóticos. Al aumentar la velocidad de rotación en la célula de Couette, lo propio hacen la entropía y la dimensión de los atractores subyacentes.

Se ha demostrado en los últimos años que un número creciente de sistemas exhiben un comportamiento estocástico provocado por un simple atractor caótico. Recordemos, entre ellos, el diagrama de convección de un fluido calentado en una caja pequeña, la oscilación de los niveles de las concentraciones en reacciones químicas inestables, los latidos de las células del corazón de pollo y muchos osciladores eléctricos y mecánicos. Ha aparecido, también, esta simple forma de aleatoriedad en modelos simulados de fenómenos muy diversos, desde epidemias o la actividad eléctrica de una célula nerviosa hasta oscilaciones estelares.

Incluso hay en marcha experimentos para buscar caos en sistemas tan dispares como las ondas cerebrales y la economía.

Importa señalar que la teoría del caos está lejos de constituir una panacea. Cuando hay muchos grados de libertad, los movimientos son complicados y aleatorios. Pero, aun cuando se determine que un sistema es caótico, esto no aclara mucho. Un buen ejemplo es el de las moléculas que rebotan unas contra otras en un gas. Saber que se trata de un sistema caótico no nos facilita la predicción de su comportamiento. Son tantas las partículas que intervienen, que todo lo alcanzable es una descripción estadística, y las propiedades estadísticas esenciales pueden obtenerse sin tener en cuenta el caos.

Hay otras cuestiones en las que se desconoce el papel desempeñado por el caos. ¿Qué ocurre con las pautas espacialmente extensas que cambian sin cesar, como las dunas del Sahara o la turbulencia desenfrenada? No está claro que las pautas espaciales complejas reciban adecuada descripción mediante un único atractor en un espacio de configuraciones. Pero quizá la experiencia con los atractores elementales sirva de guía para una imagen más avanzada, que podría involucrar conjuntos de formas deterministas, espacialmente móviles, similares a los atractores caóticos.

La existencia del caos afecta incluso al mismo método científico. El procedimiento clásico para verificar una teoría consiste en hacer predicciones y contrastarlas con los datos experimentales. Ahora bien, si los fenómenos son caóticos, las predicciones a largo plazo resultan intrínsecamente imposibles. Y esto debe tenerse en cuenta al juzgar los méritos de una teoría. El proceso de su verificación se hace así mucho más delicado, y se debe basar en propiedades estadísticas y geométricas antes que en la predicción.

El caos presenta un nuevo desafío al punto de vista reduccionista, según el cual un sistema puede entenderse descomponiéndolo y estudiando cada parte por separado. Si esta idea ha prevalecido en ciencia es en parte porque hay muchos sistemas en los que el comportamiento del todo es realmente la suma de los comportamientos de sus componentes. El caos demuestra, sin embargo, que un sistema puede tener un comportamiento complicado que emerge en virtud de simples interacciones no lineales entre unos cuantos componentes.

El problema se está agudizando en un amplio campo de disciplinas científicas, desde la descripción de la física microscópica hasta la construcción de modelos del comportamiento macroscópico de organismos biológicos. La capacidad de obtener un conocimiento detallado de la estructura de un sistema ha experimentado un decidido avance en estos últimos años, pero la de integrar ese conocimiento se ha visto frenada por la falta de un marco conceptual apropiado para describir de manera cualitativa el comportamiento. Por ejemplo, ni siquiera con un mapa completo del sistema nervioso de un organismo simple, como el del nemátodo estudiado por Sidney Brenner, de la Universidad de Cambridge, es posible deducir su comportamiento. Análogamente, la esperanza de que la física pueda alcanzar su cumplimiento gracias a un conocimiento cada vez más pormenorizado de las fuerzas y los constituyentes fundamentales es totalmente infundada. La interacción entre los componentes en una escala puede llevar a un comportamiento global muy complejo en otra escala mayor que, en general, no puede deducirse del conocimiento de los componentes individuales.

A menudo se trata el caos en función de las limitaciones que impone, verbigracia, la falta de predecibilidad. Pero la naturaleza puede usar el caos de manera constructiva. A través de la amplificación de pequeñas fluctuaciones puede facilitar a los sistemas naturales el acceso a lo nuevo. Una presa que escapa del ataque de un predador puede usar el control caótico del vuelo como un elemento de sorpresa para evitar su captura. La evolución biológica necesita de la variabilidad genética; el caos proporciona un medio de estructurar los cambios al azar, haciendo así posible que la variabilidad esté bajo el control evolutivo.

El mismo proceso del progreso intelectual se basa en la inyección de nuevas ideas y en nuevos modos de conectar las viejas. Bajo la creatividad innata podría haber un proceso caótico subyacente que amplifica selectivamente pequeñas fluctuaciones y las moldea en estados mentales coherentes y macroscópicos que se experimentan como pensamientos. En algunos casos, los pensamientos pueden ser decisiones o lo que se siente como ejercicio de la voluntad. Desde esta perspectiva, el caos proporciona un mecanismo que permite el libre albedrío en un mundo gobernado por leyes deterministas.