

herramienta poderosa para describir el comportamiento de los sistemas caóticos. La utilidad de la imagen que así se obtiene reside en la posibilidad de representar el comportamiento de manera geométrica. Por ejemplo, un péndulo con rozamiento termina por detenerse, lo que significa que la órbita se aproxima a un punto en el espacio de configuraciones. Este punto no se mueve: está fijo; por atraer a las órbitas próximas, recibe el nombre de atractor. Si se da un pequeño empujón al péndulo, vuelve al mismo punto fijo atractor. Cualquier sistema que tiende al reposo con el paso del tiempo puede caracterizarse por un punto fijo en el espacio de configuraciones. Este es el caso de un fenómeno muy general, por el que las pérdidas debidas al rozamiento o a la viscosidad, por ejemplo, provocan que las órbitas sean atraídas hacia una región menor del espacio de configuraciones con menos dimensiones. Se dice que una región así constituye un atractor. *Grosso modo*, un

atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema.

Algunos sistemas no tienden al reposo a largo plazo, sino que recorren periódicamente una sucesión de estados. Fijémonos en el reloj de péndulo; en él, la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un muelle o un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez. En el espacio de configuraciones, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una órbita periódica. Independientemente de cómo empiece a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a largo plazo es siempre el mismo. Tales atractores son llamados, por ello, ciclos límite. Otro sistema familiar con un ciclo límite es el corazón.

Un sistema puede tener varios atractores. Si así ocurre, diferentes condiciones iniciales pueden llevar a diferentes atractores. El conjunto de puntos que evoluciona hacia un atractor se

llama su cuenca de atracción. El reloj de péndulo tiene dos cuencas: los desplazamientos pequeños desde su posición de reposo le devuelven de nuevo al reposo; con desplazamientos grandes, sin embargo, el reloj empieza su tic-tac conforme el péndulo ejecuta una oscilación estable.

La forma de atractor que sigue en complejidad es un toro, una figura semejante a la superficie de una rosquilla. Describe movimientos que constan de dos oscilaciones independientes, llamados a veces movimientos cuasiperiódicos. (Los osciladores eléctricos son ejemplos físicos.) La órbita se arrolla rodeando el toro en el espacio de las configuraciones, de modo que una frecuencia queda determinada por la rapidez con que la órbita rodea el toro por el camino más corto y la otra por la rapidez con que lo hace alrededor del camino más largo. Los atractores pueden también ser toros de más dimensiones, lo que representa la combinación de más de dos oscilaciones.

4. LOS ATRACTORES son formas geométricas que caracterizan el comportamiento a largo plazo en el espacio de configuraciones. A grandes rasgos, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Se muestran aquí los atractores en azul y los estados iniciales en rojo. Las trayectorias (verde) acaban acercándose a los atractores desde los estados iniciales. El tipo más simple de atractor es un punto fijo (arriba, izquierda). Tal atractor corresponde a un péndulo con rozamiento; el péndulo llega siempre a la misma posición de reposo, independientemente del modo en que empezó a oscilar (véase la mitad derecha de la figura 3). El que le sigue en complejidad es el ciclo límite (arriba, centro) que forma un ciclo cerrado en el espacio de configuraciones. Un

ciclo límite describe oscilaciones estables, como el movimiento de un reloj de péndulo y el latido del corazón. Las oscilaciones compuestas, o comportamiento cuasiperiódico, corresponden a un toro atractor (arriba, derecha). Estos tres atractores son predecibles: su comportamiento puede pronosticarse con exactitud. Los atractores caóticos, en cambio, corresponden a movimientos impredecibles y adquieren una forma geométrica más complicada. En la parte de abajo se muestran tres ejemplos de atractores caóticos; de izquierda a derecha, se ofrecen los descubiertos por Edward N. Lorenz, Otto F. Rössler y uno de los autores (Shaw), respectivamente. Las imágenes se prepararon usando sistemas simples de ecuaciones diferenciales en espacios de fases tridimensionales.

herramienta poderosa para describir el comportamiento de los sistemas caóticos. La utilidad de la imagen que así se obtiene reside en la posibilidad de representar el comportamiento de manera geométrica. Por ejemplo, un péndulo con rozamiento termina por detenerse, lo que significa que la órbita se aproxima a un punto en el espacio de configuraciones. Este punto no se mueve: está fijo; por atraer a las órbitas próximas, recibe el nombre de atractor. Si se da un pequeño empujón al péndulo, vuelve al mismo punto fijo atractor. Cualquier sistema que tiende al reposo con el paso del tiempo puede caracterizarse por un punto fijo en el espacio de configuraciones. Este es el caso de un fenómeno muy general, por el que las pérdidas debidas al rozamiento o a la viscosidad, por ejemplo, provocan que las órbitas sean atraídas hacia una región menor del espacio de configuraciones con menos dimensiones. Se dice que una región así constituye un atractor. *Grosso modo*, un

atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema.

Algunos sistemas no tienden al reposo a largo plazo, sino que recorren periódicamente una sucesión de estados. Fijémonos en el reloj de péndulo; en él, la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un muelle o un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez. En el espacio de configuraciones, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una órbita periódica. Independientemente de cómo empiece a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a largo plazo es siempre el mismo. Tales atractores son llamados, por ello, ciclos límite. Otro sistema familiar con un ciclo límite es el corazón.

Un sistema puede tener varios atractores. Si así ocurre, diferentes condiciones iniciales pueden llevar a diferentes atractores. El conjunto de puntos que evoluciona hacia un atractor se

llama su cuenca de atracción. El reloj de péndulo tiene dos cuencas: los desplazamientos pequeños desde su posición de reposo le devuelven de nuevo al reposo; con desplazamientos grandes, sin embargo, el reloj empieza su tic-tac conforme el péndulo ejecuta una oscilación estable.

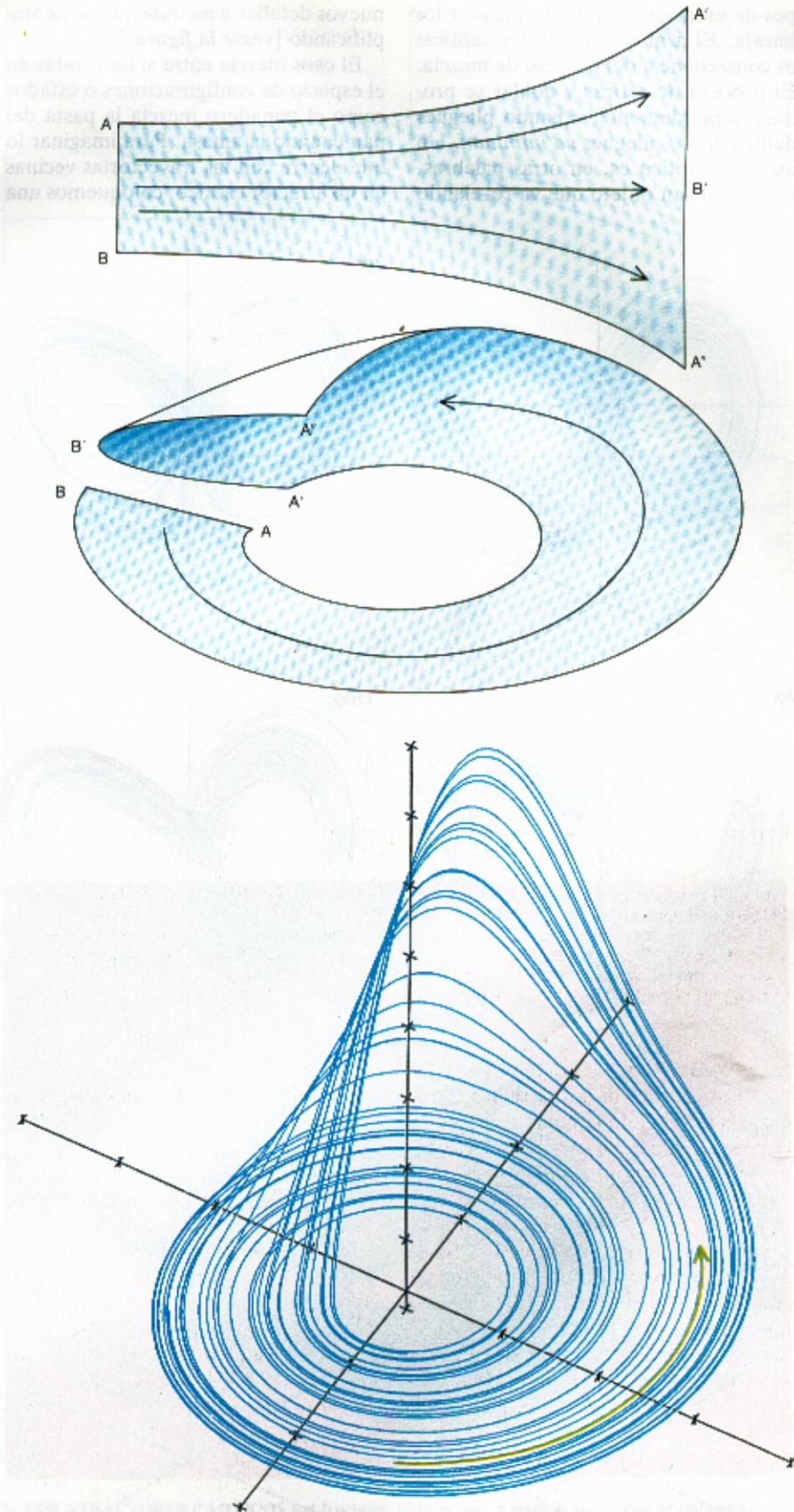
La forma de atractor que sigue en complejidad es un toro, una figura semejante a la superficie de una rosquilla. Describe movimientos que constan de dos oscilaciones independientes, llamados a veces movimientos cuasiperiódicos. (Los osciladores eléctricos son ejemplos físicos.) La órbita se enrolla rodeando el toro en el espacio de las configuraciones, de modo que una frecuencia queda determinada por la rapidez con que la órbita rodea el toro por el camino más corto y la otra por la rapidez con que lo hace alrededor del camino más largo. Los atractores pueden también ser toros de más dimensiones, lo que representa la combinación de más de dos oscilaciones.

Característica importante de los movimientos cuasiperiódicos es la de su impredecibilidad, a pesar de su complejidad. Aun cuando la órbita no se repite nunca exactamente, si las frecuencias carecen de divisor común, el movimiento sigue siendo regular. Las órbitas que empiezan cerca la una de la otra en el toro permanecen siempre cercanas, por lo que la predecibilidad a largo plazo está garantizada.

Hasta hace muy poco, los puntos fijos, los ciclos límite y los toros eran los únicos atractores conocidos. En 1963, Edward N. Lorenz, del Instituto de Tecnología de Massachusetts, descubrió un ejemplo de un sistema de pocos grados de libertad que presentaba un comportamiento complejo. Motivado por el deseo de entender la impredecibilidad del tiempo meteorológico, empezó con las ecuaciones del movimiento de un flujo fluido (la atmósfera puede considerarse un fluido); simplificándolas, obtuvo un sistema con tan sólo tres grados de libertad. A pesar de ello, el sistema se comportaba de un modo aparentemente estocástico que escapaba a toda caracterización adecuada por cualquiera de los tres tipos de atractor entonces conocidos. El atractor que observó, llamado hoy atractor de Lorenz, fue el primer ejemplo de atractor caótico, o extraño.

Usando un computador digital para simular su sencillo modelo, Lorenz dilucidó el mecanismo básico responsable del azar observado: las perturbaciones microscópicas se amplifican hasta interesar el comportamiento macroscópico. Dos órbitas con condiciones iniciales próximas divergen rápidamente de forma exponencial y por ello permanecen cercanas sólo durante un corto período. La situación difiere cualitativamente en los atractores no caóticos. En ellos, las órbitas vecinas siguen estando cerca, los pequeños errores se mantienen acotados y el comportamiento es predecible.

La clave para entender el comportamiento caótico está en una simple operación de estirado y plegado que se produce en el espacio de los estados. La divergencia exponencial constituye una propiedad local: puesto que los atractores tienen tamaño finito, dos órbitas en uno de ellos no pueden diverger exponencialmente de manera indefinida. En consecuencia, el atractor debe plegarse sobre sí mismo. Aunque las órbitas diverjan y sigan caminos cada vez más alejados, en algún momento habrán de acercarse de nuevo entre sí. Al hacerlo, las órbitas se mezclan en un atractor extraño, como nai-



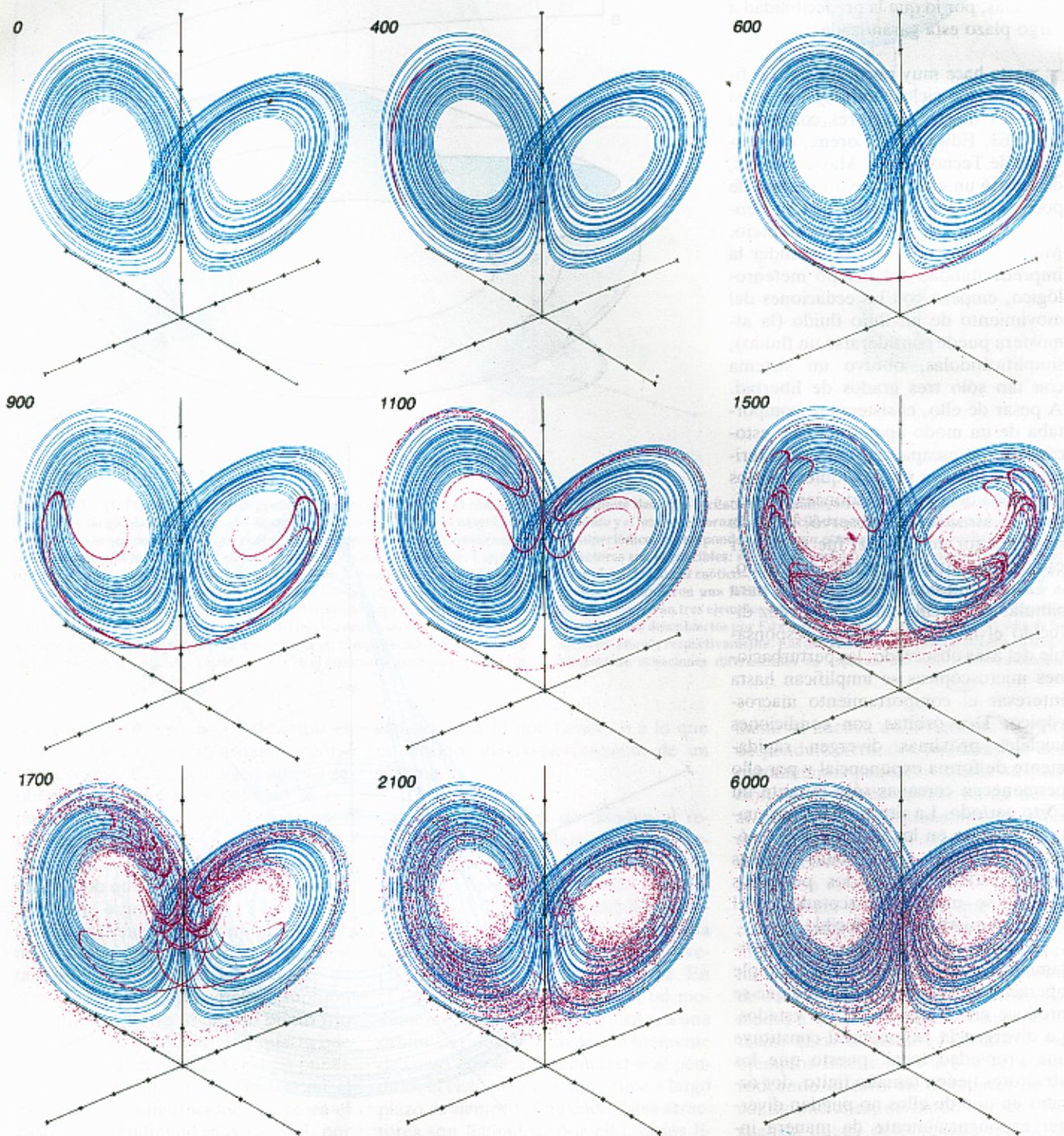
5. UN ATRACTOR CAOTICO desarrolla una estructura mucho más complicada que la que presenta un atractor predecible (un punto, un ciclo límite o un toro). Observado a gran escala, un atractor caótico no constituye una superficie suave, sino una superficie que se pliega sobre sí misma. La ilustración muestra los pasos para construir un atractor caótico del tipo más elemental: el atractor de Rössler (abajo). Primero, las trayectorias próximas en el objeto deben "estirarse", o divergir, exponencialmente (arriba); aquí las distancias entre las trayectorias se ofrecen dobladas, casi. En segundo lugar, para que el objeto se mantenga compacto, se debe "doblar" sobre sí mismo (centro); la superficie se pliega sobre ella, de suerte que sus dos extremos se encuentren. El atractor de Rössler, observado en muchos sistemas, desde flujos de fluidos hasta reacciones químicas, confirma la máxima de Einstein de que la naturaleza prefiere las formas simples.

pes de un mazo cuando un jugador los baraja. El azar de las órbitas caóticas es consecuencia del proceso de mezcla. El proceso de estirar y doblar se produce repetidamente, creando pliegues dentro de los pliegues *ad infinitum*. Un atractor caótico es, en otras palabras, un fractal: un objeto que va revelando

nuevos detalles a medida que se va amplificando [véase la figura 7].

El caos mezcla entre sí las órbitas en el espacio de configuraciones o estados como el panadero mezcla la pasta del pan cuando la amasa. Para imaginar lo que ocurre con las trayectorias vecinas en un atractor caótico, coloquemos una

gota de colorante azul en la masa. El amasado consta de dos acciones: estirar la masa, con la consiguiente extensión del colorante, y plegarla sobre sí misma. Al principio, la gota de colorante sólo se alarga, pero acaba por plegarse sobre sí misma, y con el paso del tiempo se estira y repliega muchas



**6. DIVERGENCIA de las trayectorias próximas.** Constituye la razón última por la que el caos lleva a la impredecibilidad. Una medición perfecta correspondería a un punto en el espacio de configuraciones, pero cualquier medición real resulta imperfecta y genera un entorno de incertidumbre. El verdadero estado podría hallarse en cualquier parte del entorno. Lo que se muestra aquí en el atractor de Lorenz, con la incertidumbre en la medida inicial representada por 10.000 puntos rojos, tan juntos entre sí, en un comienzo, que son indistin-

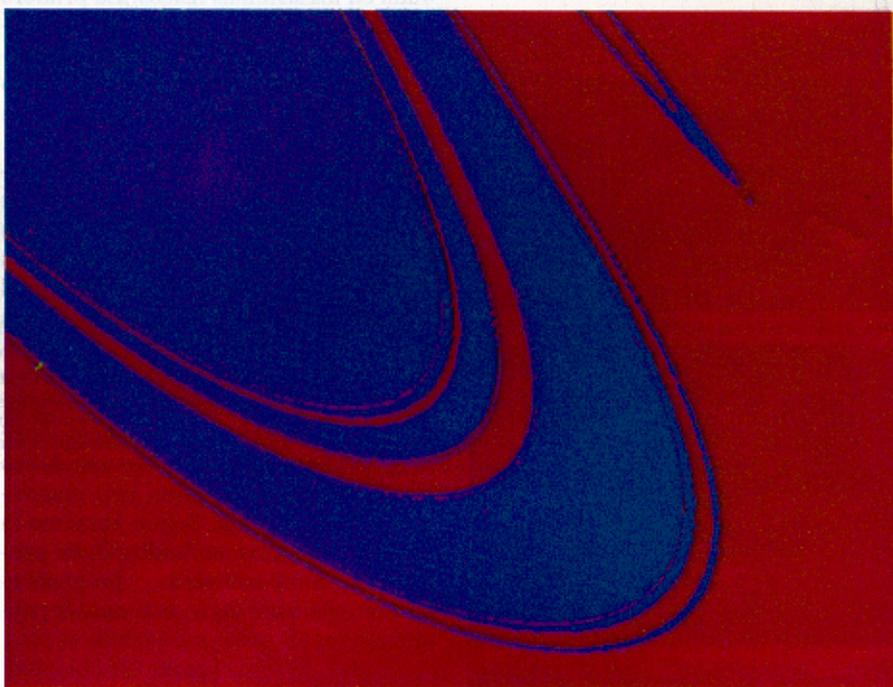
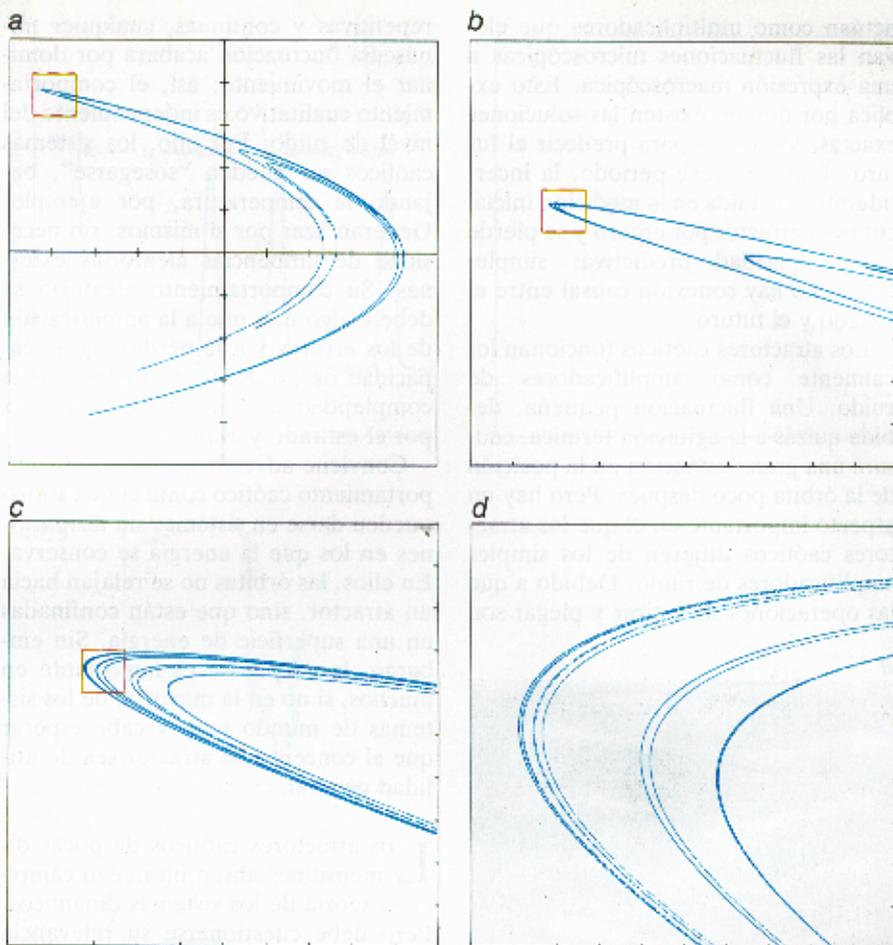
guibles. Al moverse cada punto bajo la acción de las ecuaciones, la nube se estira hasta convertirse en un hilo largo y fino, que se pliega después sobre sí mismo muchas veces, hasta que sus puntos se extienden por todo el atractor. La predicción se torna entonces imposible: el estado final puede encontrarse en cualquier parte del atractor. En el caso de un atractor predecible, por el contrario, todos los estados finales permanecen próximos. Los números que hay escritos sobre los esquemas indican el tiempo en unidades de duocentésima de segundo.

veces. Una inspección detallada muestra que la masa consta entonces de muchas capas alternadamente azules y blancas. Tras sólo 20 pasos, la gota inicial se ha estirado hasta más de un millón de veces de su longitud original y su espesor ha disminuido hasta el nivel molecular. El tinte azul se mezcla completamente con la masa. El caos opera del mismo modo, con la diferencia de que, en vez de mezclarse con la masa, se mezcla en el espacio de los estados. Inspirado por esta imagen de la mezcla, Otto E. Röessler, de la Universidad de Tübingen, propuso el ejemplo más elemental de atractor caótico en un flujo [véase la figura 5].

Cuando se llevan a cabo observaciones sobre un sistema físico, los inevitables errores de la medición impiden especificar su estado con toda exactitud. Por cuya razón, el estado del sistema no está situado en un punto único, sino en una pequeña región del espacio de configuraciones. Aunque la incertidumbre cuántica fija el tamaño mínimo que puede tener la región, en la práctica diversas clases de ruidos de fondo limitan la exactitud de la medición e introducen errores bastante mayores. La pequeña región especificada por la medida es análoga a la gota de colorante azul en la masa.

Situar el sistema en una región pequeña del espacio de estados o configuraciones mediante una medición proporciona cierta cantidad de información sobre el sistema. Cuanto más precisa sea la medida, más conocimiento obtiene el observador sobre el estado del sistema. A la inversa, cuanto mayor sea la región más incertidumbre tendrá. Puesto que los puntos próximos en un sistema no caótico permanecen cercanos con la evolución temporal, la medición proporciona cierta cantidad de información que se conserva en el tiempo. Este es, precisamente, el sentido en el que tales sistemas pueden denominarse predecibles: las mediciones iniciales contienen información que puede usarse para predecir el comportamiento futuro. En otras palabras, los sistemas predecibles no son especialmente sensibles a los errores de la medición.

Las operaciones de estirado y plegado en un atractor caótico eliminan sistemáticamente la información inicial y la sustituyen por otra nueva; los estirones amplían las incertidumbres en las escalas pequeñas, los pliegues acercan trayectorias que estaban muy separadas y destruyen información de gran escala. Así, los atractores caóticos



7. LOS ATRACTORES CAÓTICOS son fractales: objetos que, a medida que se van amplificando, van revelando nuevos detalles. El caos produce fractales de modo natural. Al irse separando las trayectorias próximas, acaban por doblarse una sobre la otra para que el movimiento permanezca dentro de unos límites finitos. Esto se repite una y otra vez, generándose pliegues dentro de los pliegues *ad infinitum*. Como resultado, los atractores caóticos muestran una bella estructura microscópica. Michel Hénon, del Observatorio de Niza, descubrió una regla simple que estira y pliega el plano, cambiando de sitio cada uno de los puntos. Se representan aquí los obtenidos por aplicación reiterada de la regla de Hénon, empezando con un punto inicial. La forma geométrica resultante (a) proporciona un ejemplo simple de atractor caótico. El recuadro pequeño se aumenta por un factor 10 en b. Repitiendo el proceso (c, d), la estructura microscópica del atractor se manifiesta en detalle. La ilustración inferior muestra una cuenca de atracción del mapa de Hénon.