

Caos

Hay orden en el caos: el azar tiene una forma geométrica subyacente. El caos impone límites fundamentales a la predicción, pero también sugiere relaciones causales donde nadie las había sospechado

James P. Crutchfield, J. Doyne Farmer, Norman H. Packard y Robert S. Shaw

El gran poder de la ciencia descansa en la capacidad de relacionar causa y efecto. Basándose en las leyes de la gravitación, por ejemplo, los eclipses se pueden predecir con miles de años de antelación. Hay otros fenómenos naturales cuya predicción no es tan sencilla. Aunque los movimientos de la atmósfera obedecen las leyes de la física en la misma medida que los movimientos de los planetas, las predicciones meteorológicas se realizan todavía en términos de probabilidades. El clima, el flujo de un torrente y el rodar de los dados tienen, todos ellos, aspectos impredecibles. Al no aparecer una relación clara entre causa y efecto, se dice que esos fenómenos poseen elementos aleatorios. Y sin embargo, hasta hace poco tiempo, pocas razones hacían dudar de que la predecibilidad exacta se alcanzara, en principio. Se suponía que bastaría con recoger y procesar una cantidad suficiente de información.

Este enfoque se ha visto alterado por un descubrimiento sorprendente: algunos sistemas deterministas muy simples, con sólo unos pocos elementos pueden generar comportamiento aleatorio. El azar es fundamental; la información no lo esfuma. A la aleatoriedad así generada hoy le llamamos caos.

Una aparente paradoja es que el caos es determinista, generado por reglas fijas que no encierran en sí mismas ningún elemento de azar. En principio, el futuro está enteramente determinado por el pasado, pero en la práctica las pequeñas incertidumbres se agrandan, de suerte que, si bien el movimiento es predecible a corto plazo, no lo es a largo plazo. Hay orden en el caos: bajo el comportamiento errático subyacen elegantes formas geométricas que generan el azar, como ocurre con el tahúr que baraja los naipes o el repostero que bate la masa del pastel.

El descubrimiento del caos ha creado un nuevo paradigma en la construcción de modelos científicos. Por una parte,

establece nuevos límites fundamentales en la capacidad de avanzar predicciones. Pero, por otra, el determinismo inherente en el caos muestra que muchos fenómenos aleatorios son más predecibles que lo que se había pensado. Mucha información de aspecto aleatorio recogida en el pasado —y archivada porque se suponía demasiado compleja— puede explicarse ahora a través de leyes simples. El caos permite encontrar orden en sistemas tan diversos como la atmósfera, los grifos que gotean y el corazón. El resultado es una revolución que está incidiendo en muchas ramas de la ciencia.

¿Cuál es el origen del comportamiento estocástico? El movimiento browniano ofrece un ejemplo clásico de azar. Si se observa una partícula de polvo a través del microscopio, se ve que sigue un zigzag continuo y errático. Ello se debe al bombardeo que sufre la partícula por las moléculas de agua próximas en agitación térmica. Puesto que las moléculas de agua no se distinguen y su número es muy elevado, el movimiento detallado de la partícula de polvo resulta completamente impredecible. Aquí, la red de influencias causales entre las subunidades puede llegar a ser tan enmarañada, que la pauta de comportamiento resultante se vuelve absolutamente estocástica.

El caos del que trataremos no requiere un número grande de subuni-

dades o de influencias no visibles. La existencia de comportamiento aleatorio en sistemas muy simples nos obliga a reconsiderar las fuentes del azar, incluso en macrosistemas del tenor del clima.

¿Por qué motivo es mucho más difícil predecir el movimiento de la atmósfera que el del sistema solar? Ambos están constituidos por gran cantidad de partes y, ambos también, están gobernados por la segunda ley de Newton, $F=ma$, que puede considerarse un procedimiento sencillo para predecir el futuro. Si las fuerzas F que actúan sobre cierta masa m son conocidas, lo mismo ocurre con la aceleración a . Se sigue de las reglas del cálculo que, si la posición y la velocidad de un objeto pueden determinarse en un instante dado, quedan determinadas para siempre. Es esta una idea tan potente que el matemático francés del siglo XVIII Pierre Simon de Laplace se jactó en cierta ocasión de que, dadas la posición y la velocidad de todas las partículas del universo, él podría predecir el futuro para el resto de los tiempos. Aunque para conseguir este objetivo se interponen varias dificultades prácticas evidentes, durante más de 100 años ningún motivo parecía oponerse a que eso fuese así, al menos en principio. La aplicación literal del apotegma de Laplace al comportamiento humano llevó a la conclusión filosófica de que éste se halla determinado y de que no existe el libre albedrío.

1. ORIGEN DEL CAOS en la operación geométrica del estirado. El efecto se ilustra aquí con un retrato del matemático francés Henri Poincaré, el creador de la teoría de los sistemas dinámicos. La imagen inicial (arriba a la izquierda) se digitalizó, de modo que un ordenador pudiese realizar la operación del estirado. Una transformación matemática simple estira la imagen diagonalmente, como si estuviera pintada en una lámina elástica. Cuando la lámina se sale del cuadro se corta y reinserta en el otro lado, como se ve en el panel 1. (El número escrito sobre cada panel indica las veces que se ha realizado la transformación.) La aplicación repetida de la transformación tiene como efecto revolver la cara (paneles 2-4). El efecto neto es una combinación al azar de colores que produce un campo verde homogéneo (paneles 10 y 18). A veces ocurre que algunos de los puntos vuelven cerca de sus posiciones iniciales, provocando una fugaz aparición de la imagen original (paneles 47-48, 239-241). La transformación aquí mostrada tiene de especial que el fenómeno de "recurrencia de Poincaré" (como se llama en mecánica estadística) ocurre con mucha mayor frecuencia de lo normal; en una transformación caótica típica, la recurrencia es extremadamente rara; quizás ocurra una sola vez en la vida del universo. En presencia de cualquier cantidad de fluctuaciones de fondo, el tiempo entre recurrencias es normalmente tan largo que se pierde toda la información sobre la imagen original.

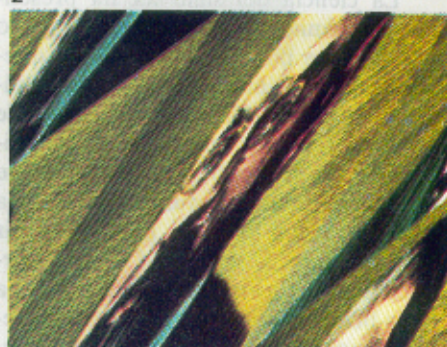
0



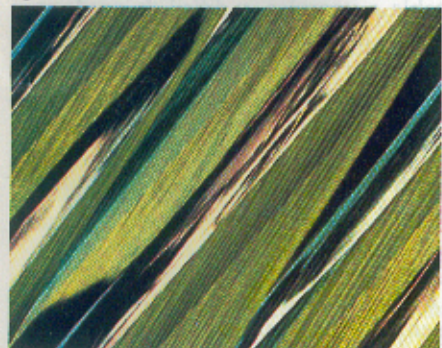
1



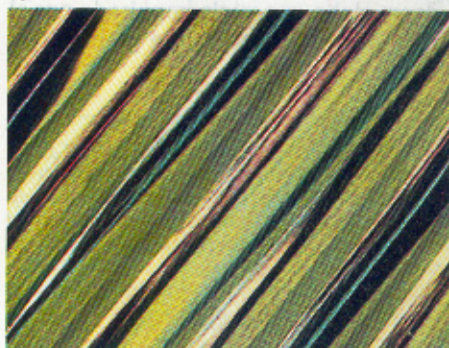
2



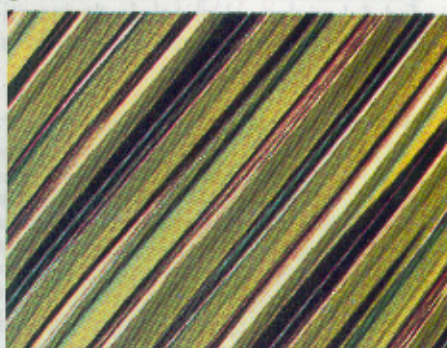
3



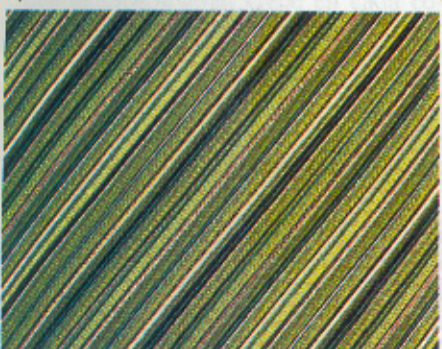
4



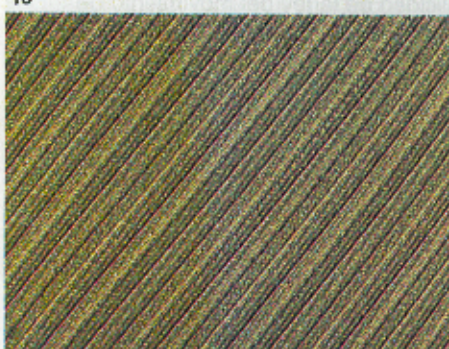
5



7



10



18



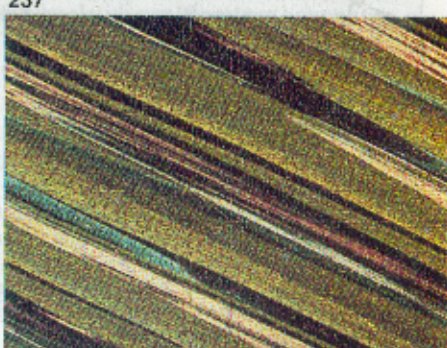
47



48



237



239



240



241



La ciencia del siglo xx ha presenciado el hundimiento del determinismo de Laplace por dos razones muy diferentes. La primera razón es la mecánica cuántica. Un dogma central de esta teoría es el principio de incertidumbre de Heisenberg, que afirma que hay una limitación fundamental a la exactitud con que se pueden medir la posición y la velocidad de una partícula. Esta incertidumbre proporciona una buena explicación para algunos fenómenos aleatorios; entre ellos, la desintegración radiactiva. Ante la exigüidad del núcleo, el principio de incertidumbre pone un límite fundamental al

conocimiento de su movimiento, imposibilitando así obtener suficiente información para predecir cuándo se desintegrará.

Sin embargo, la fuente de impredecibilidad a gran escala debe buscarse en otro sitio. Algunos fenómenos a gran escala son predecibles y otros no lo son. La distinción no tiene nada que ver con la mecánica cuántica. Por ejemplo, la trayectoria de una pelota de béisbol es, de suyo, predecible; un jugador se aprovecha de ello cada vez que la atrapa. Por contra, la trayectoria de un globo que vuela impulsado por el aire que sale del mismo a gran veloci-

dad no es predecible; el globo da tumbos y gira erráticamente en momentos y lugares que es imposible predecir. Pelota y globo obedecen las leyes de Newton; entonces, ¿por qué es el movimiento de éste mucho más difícil de predecir que el de la bola?

El ejemplo clásico de esa dicotomía nos lo ofrece el movimiento de los fluidos. Bajo ciertas circunstancias, el movimiento de un fluido es laminar—constante, estable y regular—y fácilmente predecible con las ecuaciones. Bajo otras, es turbulento—inconstante, inestable e irregular—y difícil de predecir. La transición del comportamiento laminar al turbulento es familiar para todo aquel que haya viajado en avión y pasara súbitamente del aire en calma a una tormenta. ¿Qué provoca la diferencia esencial entre movimiento laminar y turbulento?

Para entender el enigma que esto encierra, imagínese el lector que está sentado al borde de un torrente. El agua corre y salpica como si tuviese ideas propias, moviéndose primero de un modo y luego de otro. Sin embargo, las piedras del lecho del torrente están firmemente sujetas en su sitio y los afluentes entran a velocidades casi constantes. ¿A qué se debe, pues, el movimiento aleatorio del agua?

El físico soviético Lev D. Landau proporcionó una explicación del movimiento estocástico de fluidos que dominó durante muchos años y que consiste en suponer que tal movimiento incluye muchas oscilaciones diferentes e independientes. A medida que el fluido se mueve más deprisa, adquiriendo mayor turbulencia, las oscilaciones entran en movimiento de una en una. Aunque cada oscilación por separado puede ser simple, la complicación del movimiento combinado hace que el flujo resulte imposible de predecir.

Se ha demostrado, sin embargo, que la teoría de Landau no es correcta. El movimiento aleatorio se da incluso en sistemas elementales, sin necesidad de complicación o indeterminación. El matemático francés Henri Poincaré se dio cuenta de ello a finales del siglo pasado cuando indicó que algunos fenómenos impredecibles y fortuitos podían acontecer en sistemas en los que un pequeño cambio en el presente causaba otro mucho mayor en el futuro. La idea es clara si se piensa en una roca en equilibrio asentada en lo alto de una montaña. Basta un leve empujón a un lado o al otro para precipitarla hacia abajo dando tumbos por caminos completamente distintos. Aunque la roca es sensible a pequeños influjos sólo

Laplace, 1776

"El estado presente del sistema de la naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que era en el momento anterior y, si imaginamos una inteligencia que en un instante dado abarcara todas las relaciones entre los entes de este universo, podría decir las posiciones respectivas, los movimientos y las propiedades generales de todos estos entes en cualquier tiempo del pasado o del futuro.

"La astronomía física, la rama del conocimiento que hace el honor más alto a la mente humana, nos da una idea, aunque imperfecta, de lo que sería tal inteligencia. La simplicidad de la ley del movimiento de los cuerpos celestes y las relaciones entre sus masas y distancias permite al análisis seguir su movimiento hasta cierto punto; y, para determinar el estado del sistema de estos grandes cuerpos en los siglos pasados o futuros, le basta al matemático que sus posiciones y velocidades sean conocidas por la observación en cualquier momento del tiempo. El hombre debe esta capacidad al poder del instrumento que emplea y al pequeño número de relaciones que utiliza en sus cálculos. Pero la ignorancia de las diversas causas implicadas en la producción de sucesos, así como su complejidad, junto a la imperfección del análisis, impide que lleguemos a la misma certidumbre sobre la vasta mayoría de los fenómenos. Por ello hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos probables, y buscamos compensar la imposibilidad de conocerlas determinando su diferente grado de probabilidad. Así es como debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas de las teorías matemáticas, la ciencia del azar y la probabilidad."

Poincaré, 1903

"Una causa muy pequeña que escapa a nuestra atención determina un efecto considerable que no podemos dejar de observar y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento posterior. Pero, aun cuando se diese el caso de que las leyes de la naturaleza no tuvieran ningún secreto para nosotros, incluso así sólo podríamos conocer la situación inicial *aproximadamente*. Si esto nos permitiese predecir la situación siguiente con la misma aproximación, eso es todo lo que necesitamos y diríamos que el fenómeno habríase predicho, que está gobernado por leyes. Pero no siempre es así: puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales las produzcan grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en las primeras producirá un abultado error en las segundas. La predicción se hace imposible y aparece el fenómeno fortuito."

2. OPINIONES DE DOS GRANDES CIENTÍFICOS FRANCESES sobre el azar y la probabilidad, contrastadas. El matemático francés Pierre Simon de Laplace afirmaba que las leyes de la naturaleza implican un determinismo estricto y una predecibilidad completa, aunque las imperfecciones de las mediciones exigen introducir la teoría de probabilidades. La cita de Henri Poincaré, físico-matemático y teórico de la ciencia, prefigura el punto de vista contemporáneo de que pequeñas incertidumbres en el estado de un sistema podían multiplicarse con el paso del tiempo, de manera que las predicciones para el futuro lejano fueran imposibles.

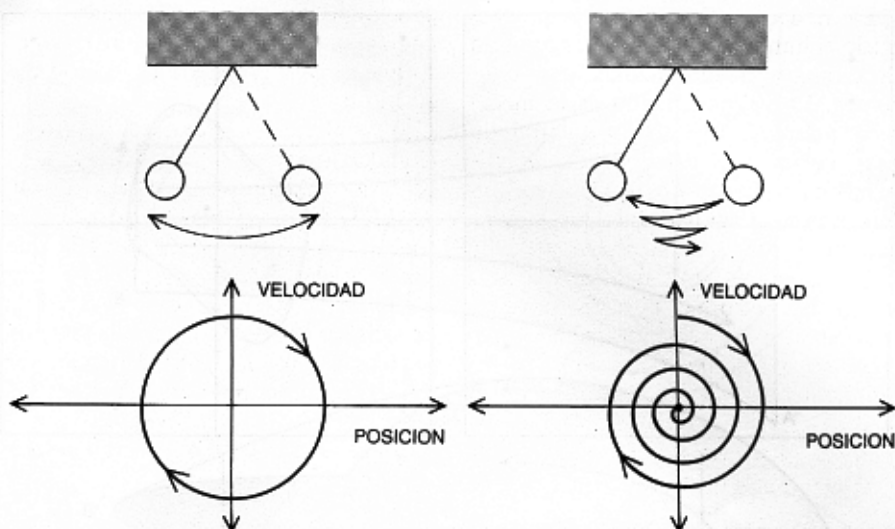
cuando está en la cima de la montaña, los sistemas caóticos lo son en cada punto de su movimiento.

Un ejemplo sencillo sirve para ilustrar cuán sensibles pueden ser ciertos sistemas físicos a influencias externas. Imaginemos un juego de billar americano, algo idealizado, en el que las bolas corran por la mesa y choquen perdiendo una cantidad de energía despreciable. Con un simple golpe, el jugador provoca en el juego de bolas una prolongada sucesión de colisiones. Naturalmente, desea conocer el efecto de su golpe. ¿Durante cuánto tiempo podría predecir la trayectoria de las bolas un jugador con un control perfecto de su taco? Si el billarista ignorase un efecto tan minúsculo como la atracción gravitatoria de un electrón situado en el borde de la galaxia, ¡la predicción sería errónea al cabo de un minuto!

El extraordinario aumento de la incertidumbre débese a que las bolas están curvadas, por lo que las pequeñas diferencias en el punto de impacto se amplían en cada colisión. Ampliación que es exponencial: crece en cada colisión, como las reproducciones sucesivas de las bacterias con espacio y alimento ilimitados. Cualquier efecto, por pequeño que sea, adquiere rápidamente proporciones macroscópicas. Esa es una de las propiedades básicas del caos.

El crecimiento exponencial de los errores debido a la dinámica caótica es la segunda razón del hundimiento del punto de vista de Laplace. La mecánica cuántica afirma que las mediciones iniciales no pueden ser totalmente precisas y el caos asegura que las imprecisiones darán, muy pronto, al traste con la capacidad de predecir. Sin el caos, Laplace podría esperar que los errores permaneciesen acotados, o, al menos, que crecieran lo bastante despacio para permitirle avanzar predicciones durante períodos largos. Con el caos, las predicciones están rápidamente condenadas a graves inexactitudes.

El marco general del que emerge el caos es la llamada teoría de los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico consta de dos partes: la noción de estado (la información esencial sobre un sistema) y una dinámica (una regla que describe cómo evoluciona el estado en el tiempo). La evolución puede representarse en un espacio de configuraciones, construcción abstracta cuyas coordenadas son las componentes del estado. En general, las coordenadas del espacio de configuraciones varían con el contexto; en el caso de un sistema mecánico podrían ser posiciones y ve-



3. EL ESPACIO DE CONFIGURACIONES, o de los estados, es un concepto útil para representar el comportamiento de un sistema dinámico. Se trata de un espacio abstracto cuyas coordenadas son los grados de libertad del movimiento de un sistema. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo (*esquemas superiores*) está completamente determinado por su posición y su velocidad iniciales. Por ello, su configuración se define por un punto en un plano cuyas coordenadas son la posición y la velocidad (*esquemas inferiores*). Mientras el péndulo oscila de un lado al otro, sigue una "órbita" o camino a través del espacio de configuraciones. En el caso de un péndulo ideal no sometido a rozamiento, la órbita es una curva cerrada (*abajo, a la izquierda*); pero si hubiera rozamiento, la órbita describiría una espiral que se acercaría a un punto (*abajo, a la derecha*).

locidades y, en el de un modelo ecológico, las poblaciones de las diferentes especies.

El péndulo simple constituye un buen ejemplo de sistema dinámico. Todo lo que se necesita para determinar su movimiento son dos variables: posición y velocidad. El estado es, pues, un punto en un plano, cuyas coordenadas son la posición y la velocidad. Las leyes de Newton dan una regla, expresada matemáticamente en una ecuación diferencial, que describe la evolución de dicho estado. Conforme el péndulo oscila a un lado y a otro, el estado se mueve a lo largo de una "órbita", o camino, en el plano. En el caso ideal de un péndulo sin rozamiento, la órbita es un ciclo; si no, describe una espiral que tiende a un punto a medida que se va frenando el péndulo.

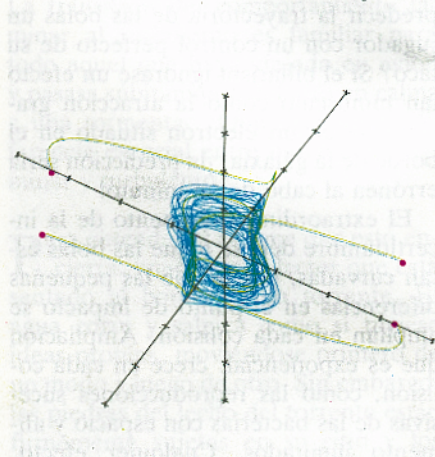
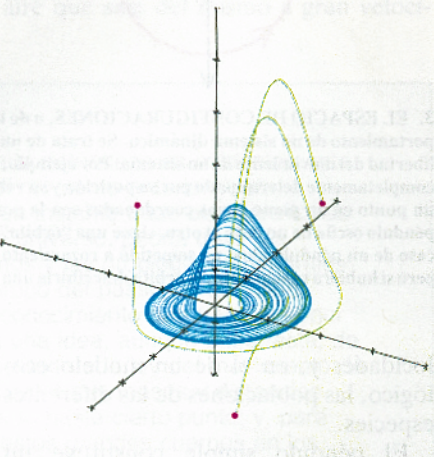
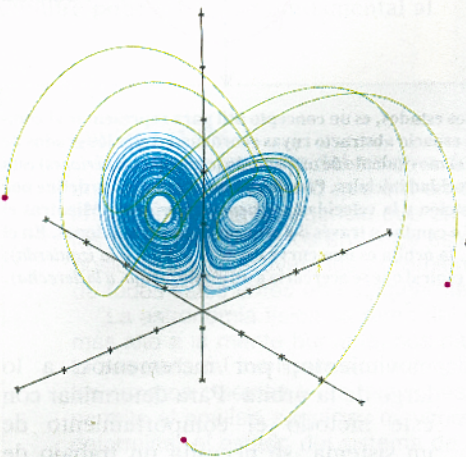
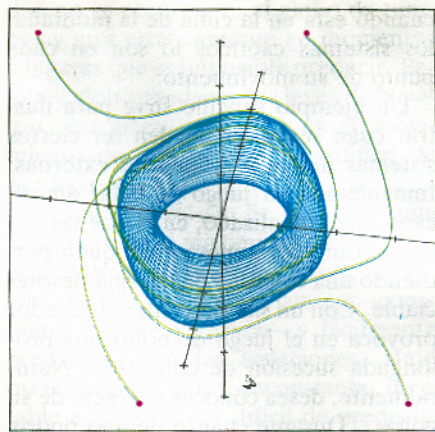
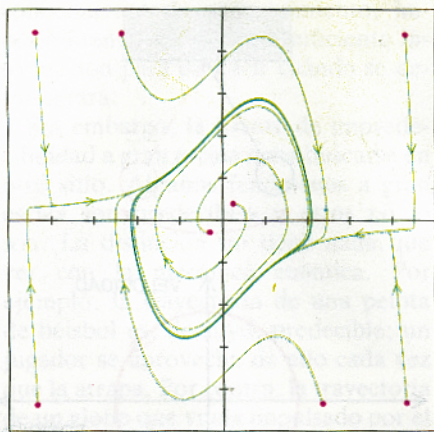
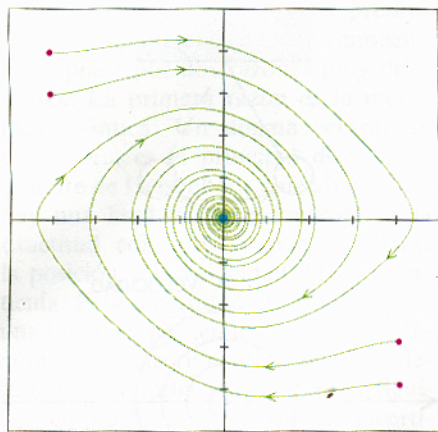
La evolución temporal de un sistema dinámico puede desarrollarse de manera continua o discreta en el tiempo. En el primer caso, se habla de un flujo; en el segundo, de una aplicación. Un péndulo se mueve continuamente de un estado a otro, y, por ello, se describe por un flujo continuo en el tiempo. El número de insectos que nacen cada año en una cierta región y el intervalo temporal entre gotas sucesivas de un grifo que gotea se explican de modo más natural mediante una aplicación discreta en el tiempo.

Para saber cómo evoluciona un sistema desde un estado inicial dado, se puede recurrir a la dinámica (las ecuaciones del movimiento) que explica el

movimiento, por incrementos, a lo largo de la órbita. Para determinar con este método el comportamiento de un sistema, se necesita un trabajo de cálculo que es proporcional al tiempo durante el que se desea seguir la órbita. En el caso de sistemas simples, así un péndulo sin rozamiento, puede ocurrir que las ecuaciones admitan una solución explícita, o sea, una fórmula que exprese cualquier estado futuro en función del inicial. Una solución explícita proporciona un atajo, un algoritmo simple que precisa sólo del estado inicial y el tiempo final para predecir el futuro sin pasar por los estados intermedios. Con tal solución, el trabajo de cálculo necesario para seguir el movimiento es más o menos independiente del tiempo deseado. A modo de ejemplo, dadas las ecuaciones del movimiento planetario y lunar, y las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, los eclipses pueden predecirse con años de antelación.

Los éxitos en la obtención de soluciones explícitas en el caso de muchos sistemas simples, durante los primeros desarrollos de la física, suscitaron la esperanza de que tales soluciones existieran para cualquier sistema mecánico. Desgraciadamente, sabemos ahora que esto no es así, en general. El comportamiento impredecible de los sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse mediante una solución explícita. Consecuentemente, no hay atajos para predecir su comportamiento.

El espacio de configuraciones o estados proporciona, no obstante, una



4. LOS ATRACTORES son formas geométricas que caracterizan el comportamiento a largo plazo en el espacio de configuraciones. A grandes rasgos, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Se muestran aquí los atractores en azul y los estados iniciales en rojo. Las trayectorias (verde) acaban acercándose a los atractores desde los estados iniciales. El tipo más simple de atractor es un punto fijo (arriba, izquierda). Tal atractor corresponde a un péndulo con rozamiento; el péndulo llega siempre a la misma posición de reposo, independientemente del modo en que empezó a oscilar (véase la mitad derecha de la figura 3). El que le sigue en complejidad es el ciclo límite (arriba, centro) que forma un ciclo cerrado en el espacio de configuraciones. Un

ciclo límite describe oscilaciones estables, como el movimiento de un reloj de péndulo y el latido del corazón. Las oscilaciones compuestas, o comportamiento cuasiperiódico, corresponden a un toro atractor (arriba, derecha). Estos tres atractores son predecibles: su comportamiento puede pronosticarse con exactitud. Los atractores caóticos, en cambio, corresponden a movimientos impredecibles y adquieren una forma geométrica más complicada. En la parte de abajo se muestran tres ejemplos de atractores caóticos; de izquierda a derecha, se ofrecen los descubiertos por Edward N. Lorenz, Otto E. Rössler y uno de los autores (Shaw), respectivamente. Las imágenes se prepararon usando sistemas simples de ecuaciones diferenciales en espacios de fases tridimensionales.